MINICURSO:

Introdução à Mecânica Lagrangiana

Profa. Fátima A. Machado

SEPEX

UFSC

Joinville

Introdução à Mecânica Lagrangiana

Objetivos do minicurso:

Apresentar os fundamentos e aplicações básicas da formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica, no objetivo de ampliar a formação dos participantes com a compreensão e as ferramentas necessárias para que possam aplicar este formalismo em contextos mais complexos nas engenharias.

SEPEX

UFSC
Joinville

Introdução à Mecânica Lagrangiana

Aula 1: 16/11, 16:20 - 18:00 - Revisão de Mecânica Newtoniana e introdução aos conceitos da formulação Lagrangiana

Aula 2: 17/11, 16:50 - 18:30 - Construção das equações de movimento do formalismo Lagrangiano e exemplos

Aula 3: 18/11, 16:20 - 18:00 - Aplicações

SEPEX

UFSC
Joinville

Introdução à Mecânica Lagrangiana

Principais referências:

- ✓ Goldstein, H. *Classical mechanics* (BSJOI: 531/G624c)
- ✓ Lemos, N. A. *Mecânica analítica* (BSCFM: 531.3/L557m)
- ✓ Marion, J. B., Thornton, S. T. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas* (BSJOI: 531.3/T514d)

SEPEX

UFSC
Joinville

Energia potencial de um sistema de partículas:

HIPÓTESE 3: $V_{ij} = V_{ij}\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right) \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\vec{F}_{ji} \parallel \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}_{(H2)}$

From these considerations it is clear that if the external and internal forces are both derivable from potentials it is possible to define a *total potential energy* of the system, V:

e $\Longrightarrow$ $$\boxed{V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} V_{ij},} \tag{1–34}$$

such that the total energy $T + V$ is conserved, the analog of the conservation theorem (1–17) for a single particle.

The second term on the right in Eq. (1–34) will be called the internal potential energy of the system. In general, it need not be zero and, more important, it may vary as the system changes with time. Only for the particular class of systems known as *rigid bodies* will the internal potential always be constant. Formally, a rigid body can be defined as a system of particles in which the distances r_{ij} are fixed and cannot vary with time. In such case the vectors $d\mathbf{r}_{ij}$ can only be perpendicular to the corresponding $\mathbf{r}_{ij}$, and therefore to the $\mathbf{F}_{ij}$. Therefore, in a rigid body the *internal forces do no work*, and the internal potential must remain constant. Since the total potential is in any case uncertain to within an additive constant, an unvarying internal potential can be completely disregarded in discussing the motion of the system.

E mais:

Para um corpo rígido, o potencial interno é somente uma constante aditiva!

Energia mecânica de um sistema de partículas:

$$T + V = \sum_i \left(\frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + V_i \right)$$

onde

$$V_i = V_{\text{ext},i} + \frac{1}{2} \sum_j V_{ij}$$

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- **Vínculos**:

São restrições ao movimento de um sistema, podendo ser expressos por equações algébricas ou diferenciais relacionando as coordenadas das posições das partes do mesmo.

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- **Vínculos**:

São restrições ao movimento de um sistema, podendo ser expressos por equações algébricas ou diferenciais relacionando as coordenadas das posições das partes do mesmo.

- Holonômico: $\exists f : f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t) = 0$
- Não-holonômico: $\nexists$ tal f (p.ex. eq. de vínculo diferencial e não algébrica)
- "Scleronomous": $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$
- "Rheonomous": $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico:

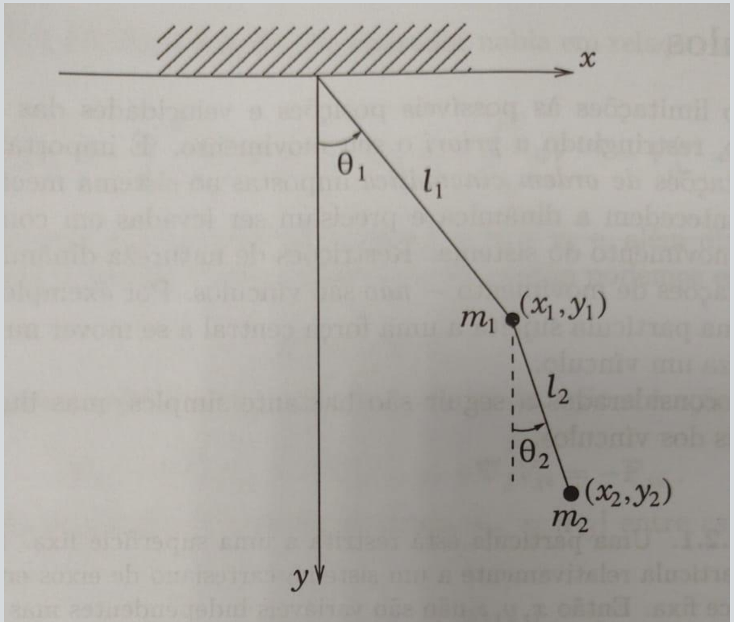


Figura 1.1: Pêndulo duplo plano.

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico:

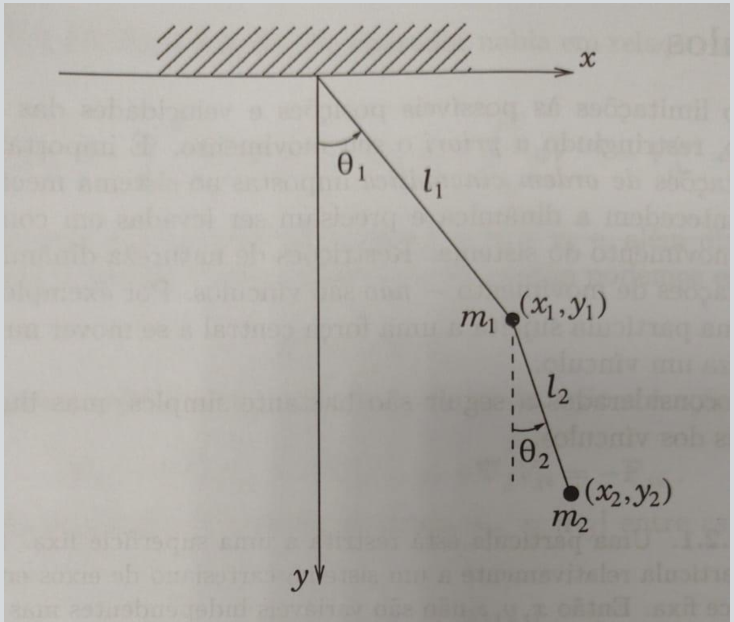


Figura 1.1: Pêndulo duplo plano.

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico:

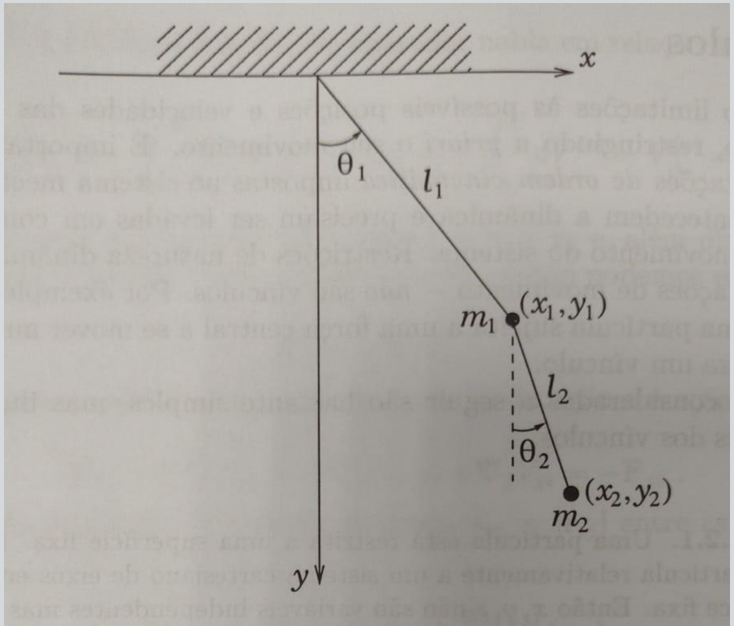


Figura 1.1: Pêndulo duplo plano.

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico:

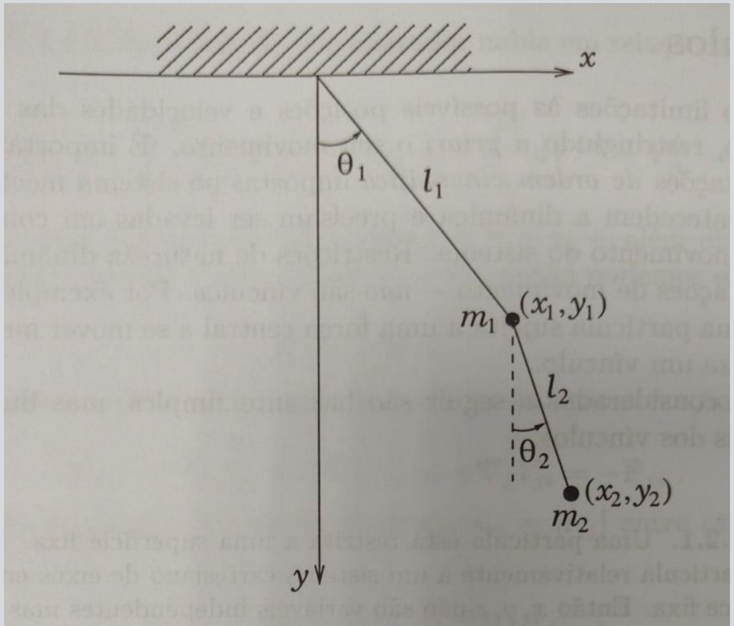


Figura 1.1: Pêndulo duplo plano.

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (\theta_1, \theta_2)$$

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- **Vínculos**:

São restrições ao movimento de um sistema, podendo ser expressos por equações algébricas ou diferenciais relacionando as coordenadas das posições das partes do mesmo.

- **Graus de liberdade:**

N partículas no $\mathbb{R}^3$, com ξ vínculos*: $(3N - \xi)$ graus de liberdade

*holonômicos, ou diferenciais integráveis.

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- **Vínculos**:

São restrições ao movimento de um sistema, podendo ser expressos por equações algébricas ou diferenciais relacionando as coordenadas das posições das partes do mesmo.

- **Graus de liberdade:**

N partículas no $\mathbb{R}^3$, com ξ vínculos*: $(3N - \xi)$ graus de liberdade

- **Coordenadas generalizadas:** $q_j, \; j = 1, \ldots, 3N - \xi$
  - Especificam univocamente todas as posições do sistema*.
  - Vínculos satisfeitos identicamente.

Exemplos…

*holonômicos, ou diferenciais integráveis.

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico:

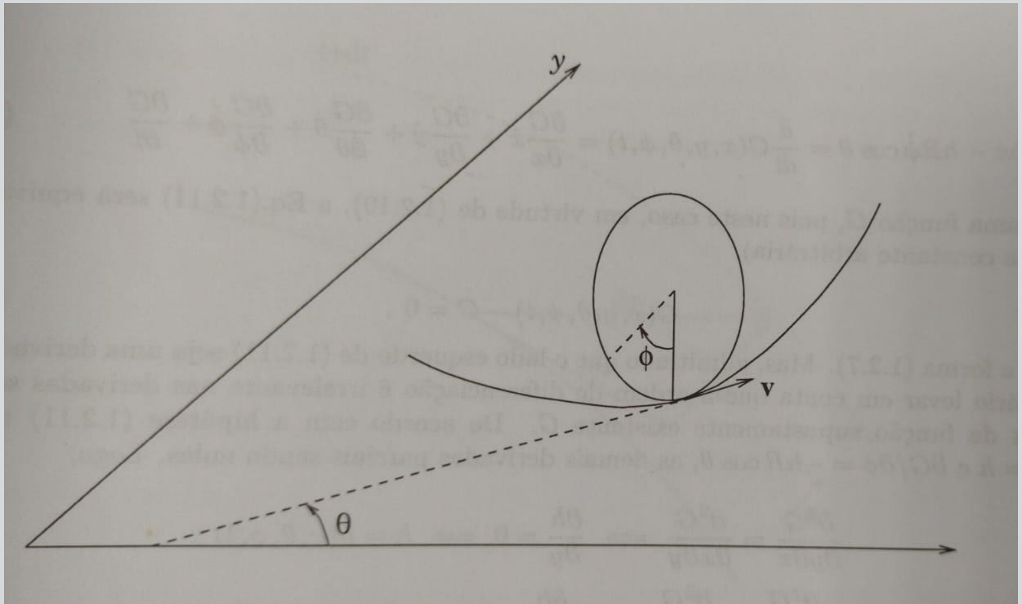


Figura 1.2: Disco rolando sem deslizar num plano horizontal.

$$\mathrm{r}\dot{\phi} = |\vec{v}| = |\dot{\vec{R}}|$$

$$\vec{R} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\Downarrow$$

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico:

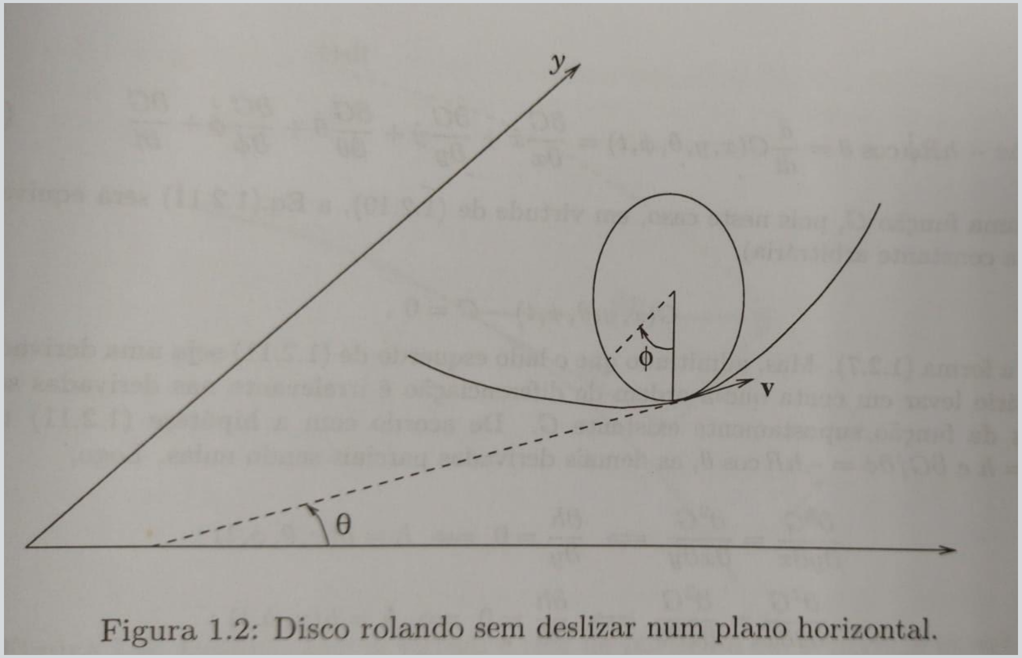


Figura 1.2: Disco rolando sem deslizar num plano horizontal.

$$\mathrm{r}\dot{\phi} = |\vec{v}| = |\dot{\vec{R}}|$$

$$\vec{R} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x} - \mathrm{r}\dot{\phi}\cos\theta = 0$$

$$\dot{y} - \mathrm{r}\dot{\phi}\sin\theta = 0$$

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico:

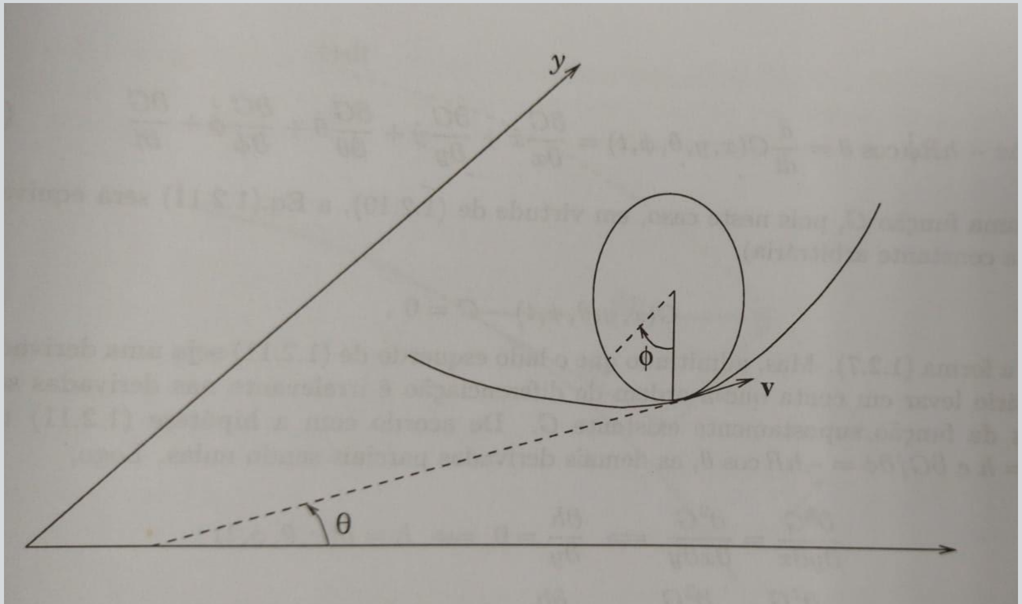


Figura 1.2: Disco rolando sem deslizar num plano horizontal.

$$\mathrm{r}\dot{\phi} = |\vec{v}| = |\dot{\vec{R}}|$$

$$\vec{R} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\Downarrow$$

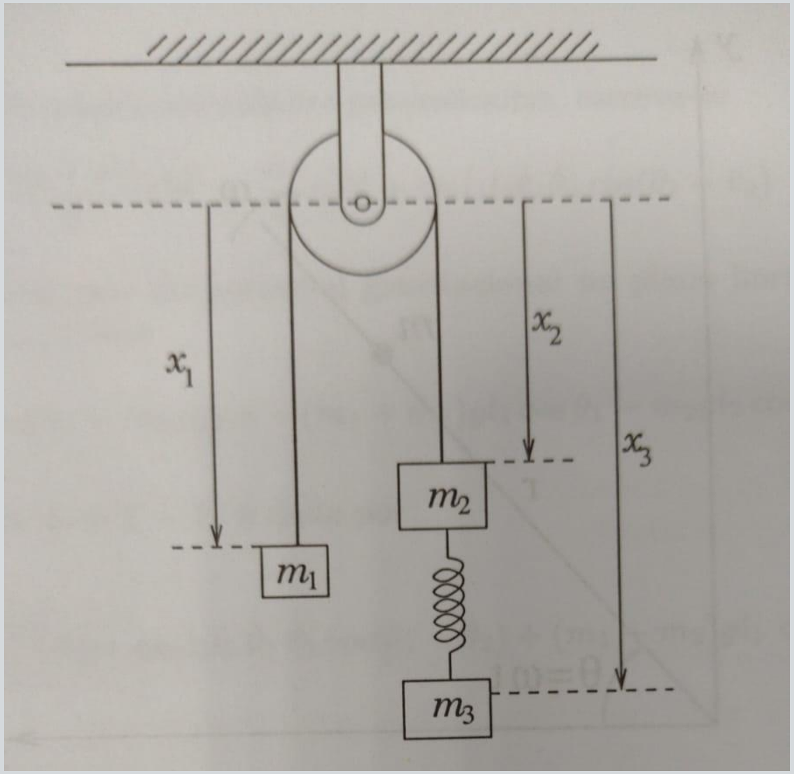
$$\mathrm{d}x = \mathrm{r}\cos\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{r}\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Exemplo de vínculos diferenciais não integráveis:

"restringem os deslocamentos possíveis do sistema mas não impõem quaisquer limites às configurações possíveis, de modo que a priori todas as configurações são acessíveis." (Nivaldo Lemos, p.13)

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico*:

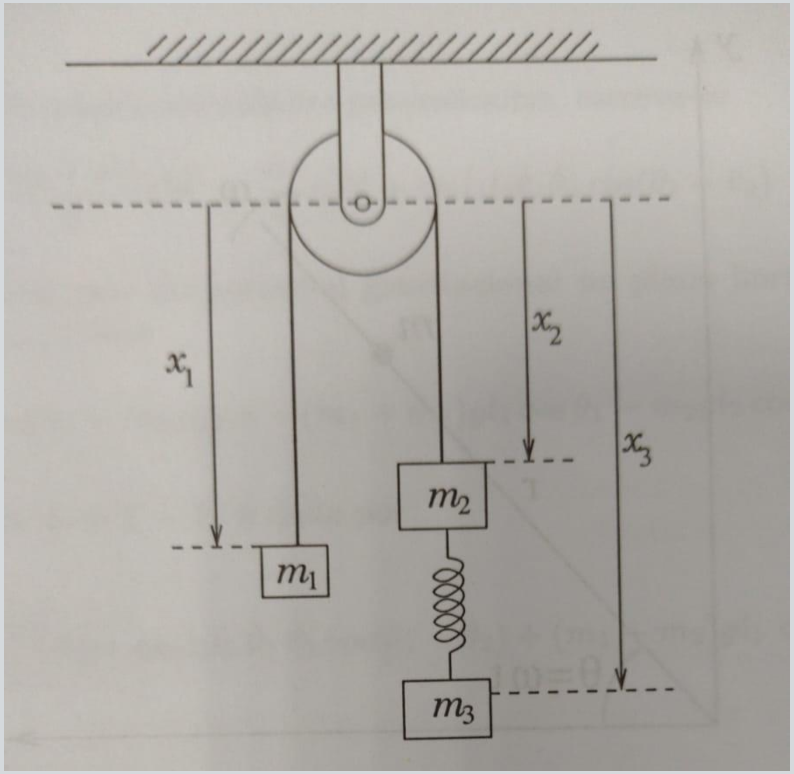


$$x_1 + x_2 = l$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3)$$
$$\mapsto (x_2, x_3)$$

*Desconsiderada a massa da polia e supondo o fio inextensível.

Vínculos e coordenadas generalizadas de um sistema mecânico*:



$$x_1 + x_2 = l$$

$$d_0 + d = x_3 - x_2$$

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_3)\\
&\mapsto (x_2, x_3)\\
&\mapsto (x_2, d)
\end{aligned}
$$

*Desconsiderada a massa da polia e supondo o fio inextensível.

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ **<u>forças de vínculo</u>**

$$\vec{F}_{\mathrm{R}i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

> *"Indeed, imposing constraints on the system is simply another method of stating that there are forces present in the problem that cannot be specified directly but are known rather in terms of their effect on the motion of the system."* (Goldstein, p.11)

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ **<u>forças de vínculo</u>**

$$\vec{F}_{\mathrm{R}_i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

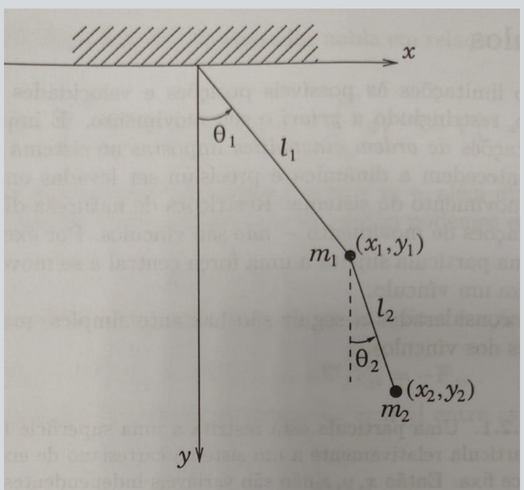
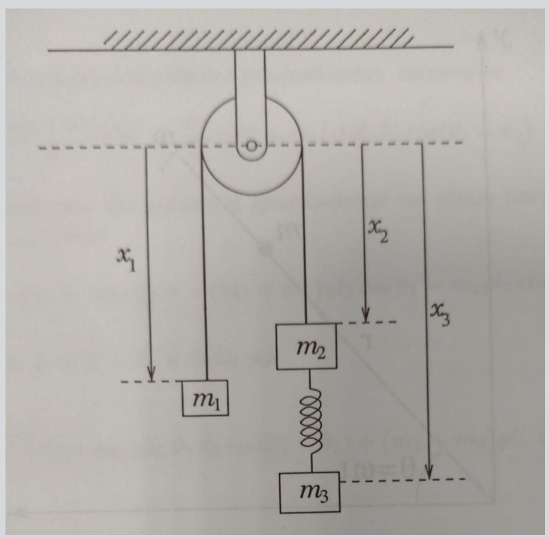


Figura 1.1: Pêndulo duplo plano.



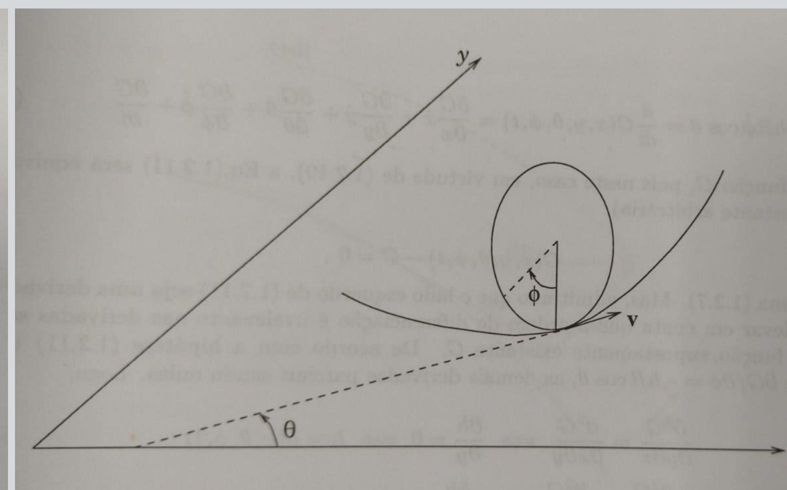


Figura 1.2: Disco rolando sem deslizar num plano horizontal.

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ <u>**forças de vínculo**</u>

$$\vec{F}_{\mathrm{R}i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

> *"Indeed, imposing constraints on the system is simply another method of stating that there are forces present in the problem that cannot be specified directly but are known rather in terms of their effect on the motion of the system."* (Goldstein, p.11)

$\hookrightarrow$ E se "retirássemos de jogo" as forças de vínculo?...

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ <u>**forças de vínculo**</u>

$$\vec{F}_{\mathrm{R}_i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

> *"Indeed, imposing constraints on the system is simply another method of stating that there are forces present in the problem that cannot be specified directly but are known rather in terms of their effect on the motion of the system."* (Goldstein, p.11)

$\hookrightarrow$ Dica:

Formally, a rigid body can be defined as a system of particles in which the distances r_{ij} are fixed and cannot vary with time. In such case the vectors $d\mathbf{r}_{ij}$ can only be perpendicular to the corresponding $\mathbf{r}_{ij}$, and therefore to the $\mathbf{F}_{ij}$. Therefore, in a rigid body the *internal forces do no work*, and the internal potential must remain constant. Since the total potential is in any case uncertain to within an additive constant, an unvarying internal potential can be completely disregarded in discussing the motion of the system.

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ **<u>forças de vínculo</u>**

$$\vec{F}_{\mathrm{R}_i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

"Indeed, imposing constraints on the system is simply another method of stating that there are forces present in the problem that cannot be specified directly but are known rather in terms of their effect on the motion of the system." (Goldstein, p.11)

$\hookrightarrow$ Dica:

Forças de vínculo não realizariam trabalho em qualquer deslocamento?

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ **<u>forças de vínculo</u>**

$$\vec{F}_{\mathrm{R}_i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

> *"Indeed, imposing constraints on the system is simply another method of stating that there are forces present in the problem that cannot be specified directly but are known rather in terms of their effect on the motion of the system."* (Goldstein, p.11)

$\hookrightarrow$ Dica:

Forças de vínculo não realizariam trabalho em qualquer deslocamento hipotético que satisfizesse os vínculos?...

Conceituos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ **<u>forças de vínculo</u>**

$$\vec{F}_{\mathrm{R}i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

- **<u>Deslocamento virtual:</u>** $\delta\vec{r}_i$ <u>infinitesimal</u>

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ **<u>forças de vínculo</u>**

$$\vec{F}_{\mathrm{R}_i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

- **<u>Deslocamento virtual:</u>** <u>$\delta\vec{r}_i$ infinitesimal</u>

  Mudança <u>formal</u> na configuração do sistema:

Enquanto $\mathrm{d}\vec{r}_i$ é o deslocamento de fato, decorrido num intervalo $\mathrm{d}t$ este $\delta\vec{r}_i$ é um deslocamento a partir de $\vec{r}_i(t)$, portanto $\delta\vec{r}_i(t)$. Este, por construção, deve ser consistente com os vínculos.

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- Vínculos $\Longleftarrow$ <u>**forças de vínculo**</u>

$$\vec{F}_{\mathrm{R}_i} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

- <u>**Deslocamento virtual:** $\delta\vec{r}_i$ infinitesimal</u>

  Mudança <u>formal</u> na configuração do sistema:

Enquanto $\mathrm{d}\vec{r}_i$ é o deslocamento de fato, decorrido num intervalo $\mathrm{d}t$ este $\delta\vec{r}_i$ é um deslocamento a partir de $\vec{r}_i(t)$, portanto $\delta\vec{r}_i(t)$. Este, por construção, deve ser consistente com os vínculos.

- **Trabalho virtual:**

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- HIPÓTESE 4: $\sum_i \vec{F}_i^{(v)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \;\; \forall\, \delta\vec{r}_i$

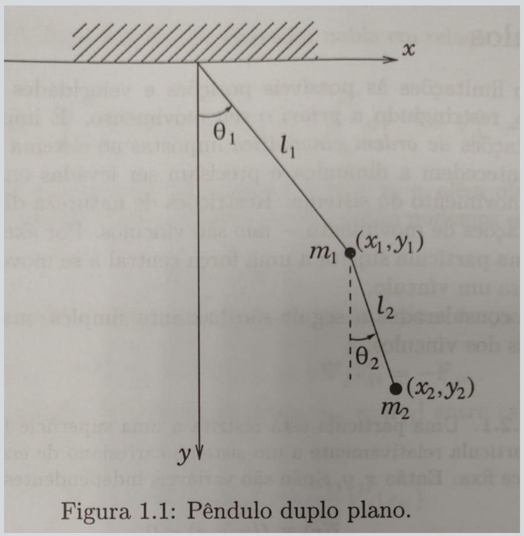
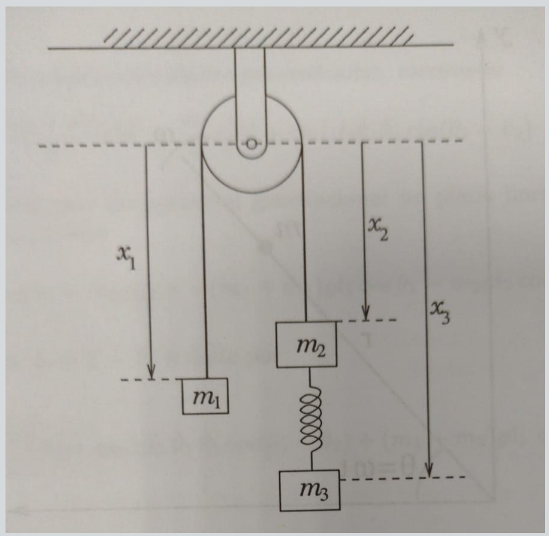


Figura 1.1: Pêndulo duplo plano.



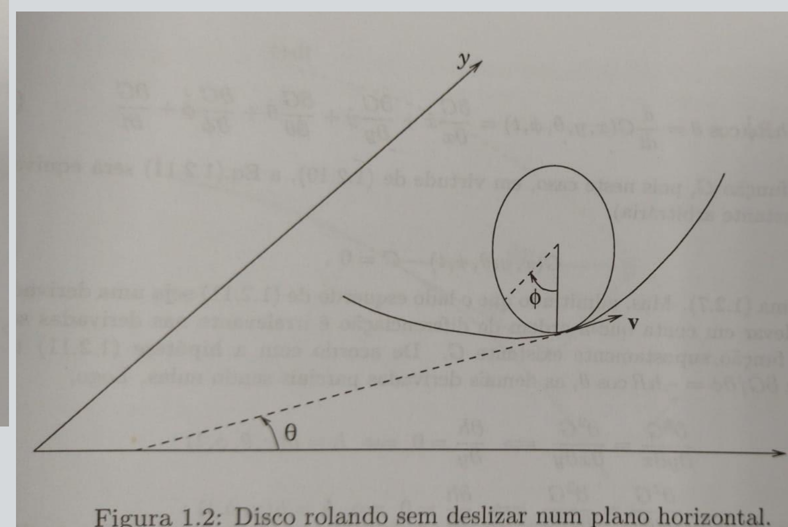


Figura 1.2: Disco rolando sem deslizar num plano horizontal.

Conceitos essenciais do formalismo Lagrangiano

- HIPÓTESE 4: $\sum_i \vec{F}_i^{(v)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

* NOTAÇÃO: vamos omitir o sobrescrito "(a)" nas forças aplicadas:

$$\vec{F}_{\mathrm{R}_i} = \boxed{\vec{F}_i} + \vec{F}_i^{(v)} = \dot{\vec{p}}_i$$

- **Princípio de D'Alembert:**

$$\boxed{\sum_i \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

Princípio de D'Alembert em termos das coordenadas generalizadas:

- Trabalho virtual: $$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-\xi} Q_j\, \delta q_j$$

- **Força generalizada:** $$\boxed{Q_j := \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$$

- HIPÓTESE 5: Coordenadas e velocidades generalizadas, $q\text{'s e } \dot{q}\text{'s}$ todas independentes entre si!

* CONDIÇÃO: $\underline{\vec{r}_i\,(q_j) \;\text{ e }\; \dot{\vec{r}}_i\,(\dot{q}_j)}$

Princípio de D'Alembert em termos das coordenadas generalizadas:

- Com alguns cálculos, mostra-se que:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-\xi}\left(Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

onde $\{\delta q_j\}$ são deslocamentos virtuais arbitrários e independentes.

$$\therefore \left(Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = 0 \quad \forall\, j$$

Equação de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

- Separando as forças aplicadas em conservativas e não-conservativas, obtemos as equações de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(\text{ñcons})}}$$

onde $\mathcal{L} := T - V$ é a chamada Lagrangiana do sistema.

Aplicando as equações de Euler-Lagrange:

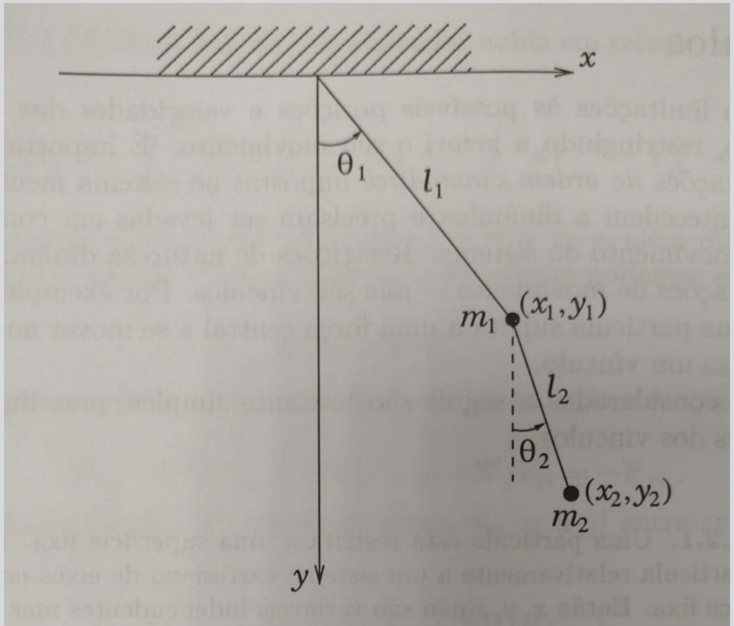


Figura 1.1: Pêndulo duplo plano.

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (\theta_1, \theta_2)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange:

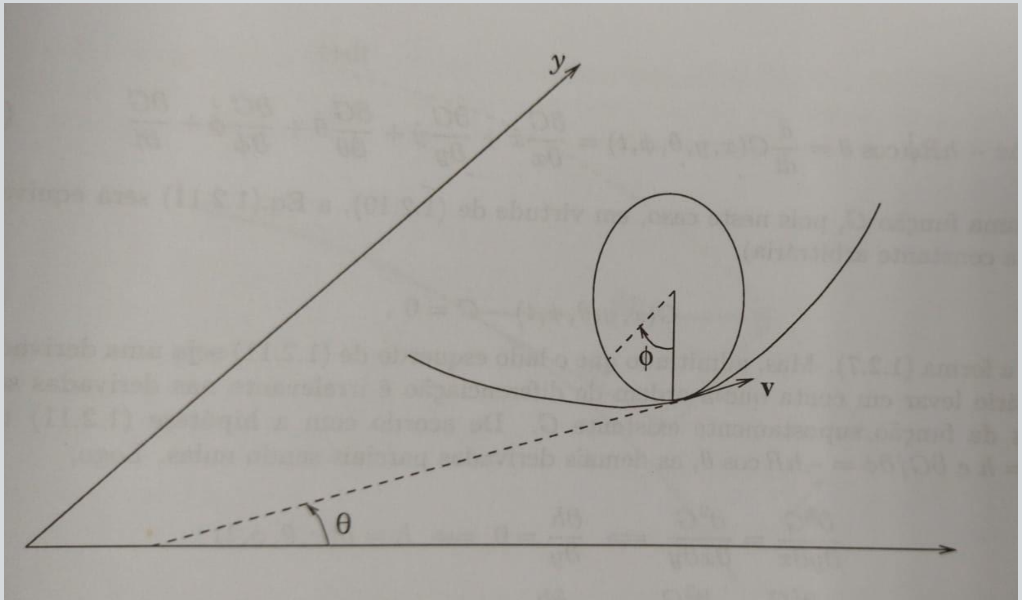


Figura 1.2: Disco rolando sem deslizar num plano horizontal.

$$\mathrm{r}\dot{\phi} = |\vec{v}| = |\dot{\vec{R}}\,|$$

$$\vec{R} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\Downarrow$$

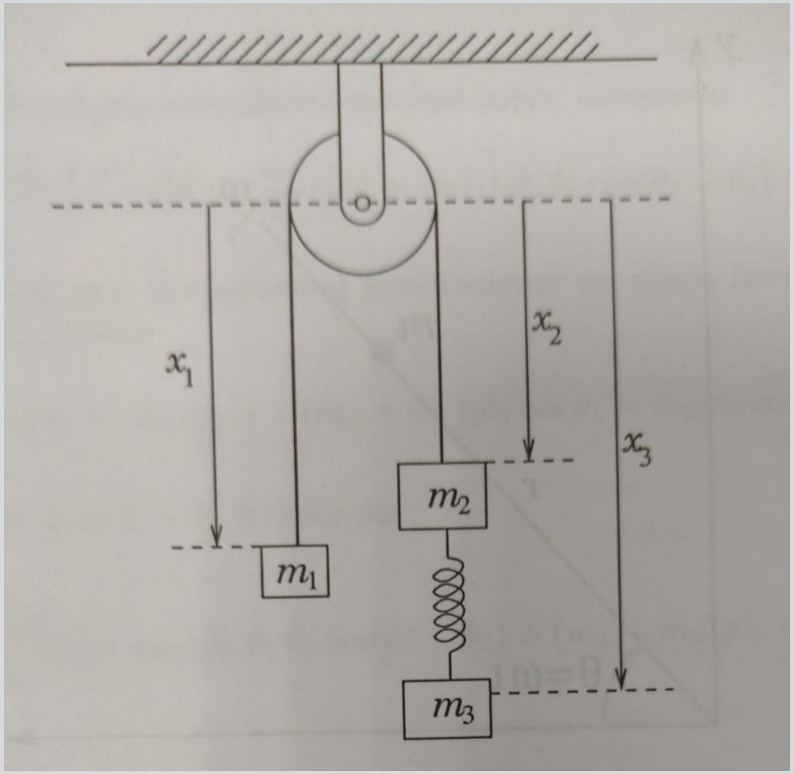
$$\mathrm{d}x = \mathrm{r}\cos\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{r}\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Exemplo de vínculos diferenciais não integráveis:

"restringem os deslocamentos possíveis do sistema mas não impõem quaisquer limites às configurações possíveis, de modo que a priori todas as configurações são acessíveis." (Nivaldo Lemos, p.13)

Aplicando as equações de Euler-Lagrange:



$$x_1 + x_2 = l$$

$$d_0 + d = x_3 - x_2$$

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_3)\\ &\mapsto (x_2, x_3)\\ &\mapsto (x_2, d)\end{aligned}$$

*Desconsiderada a massa da polia e supondo o fio inextensível.

Aplicando o formalismo Lagrangiano:

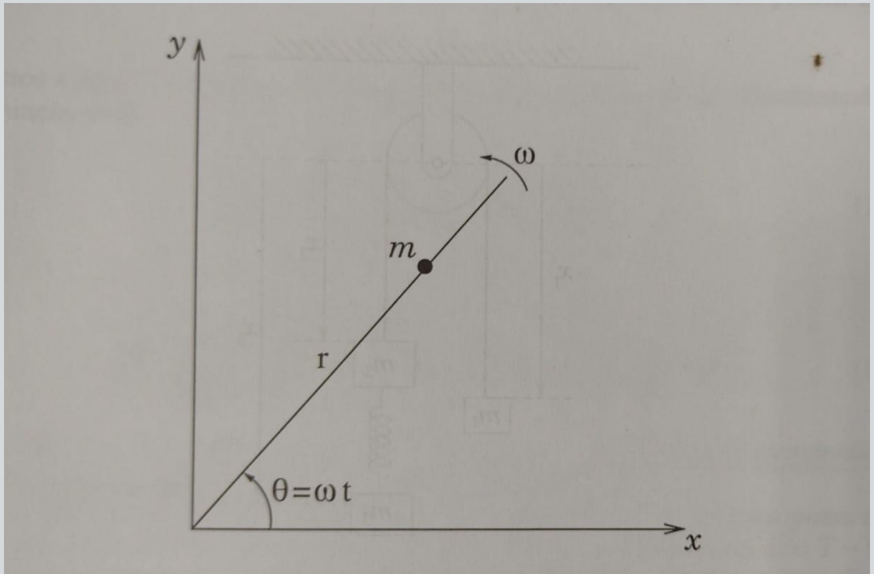


Figura 1.7: Conta deslizando ao longo de uma haste horizontal girante.

Aplicando o formalismo Lagrangiano:

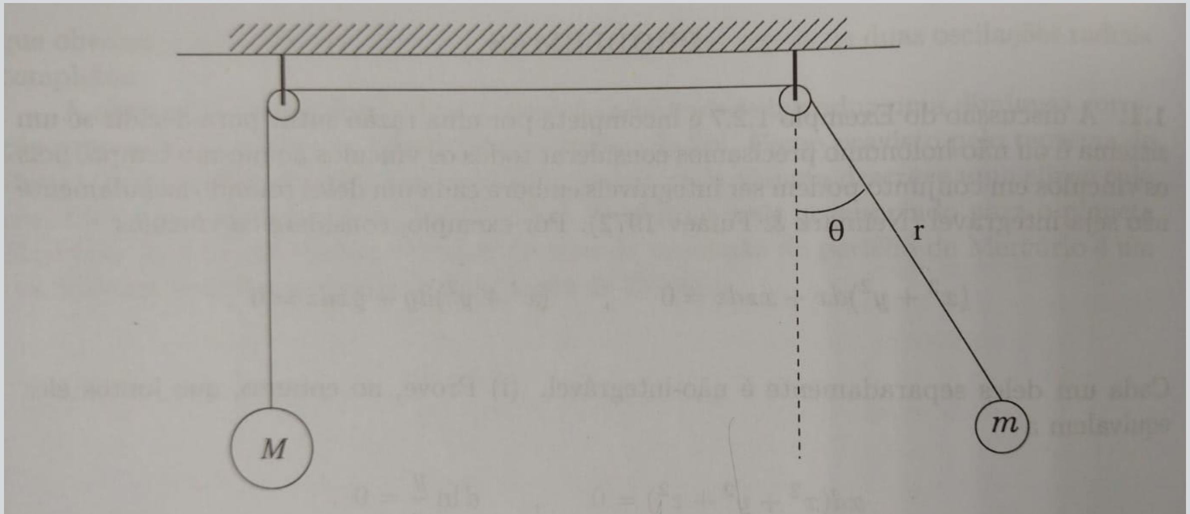
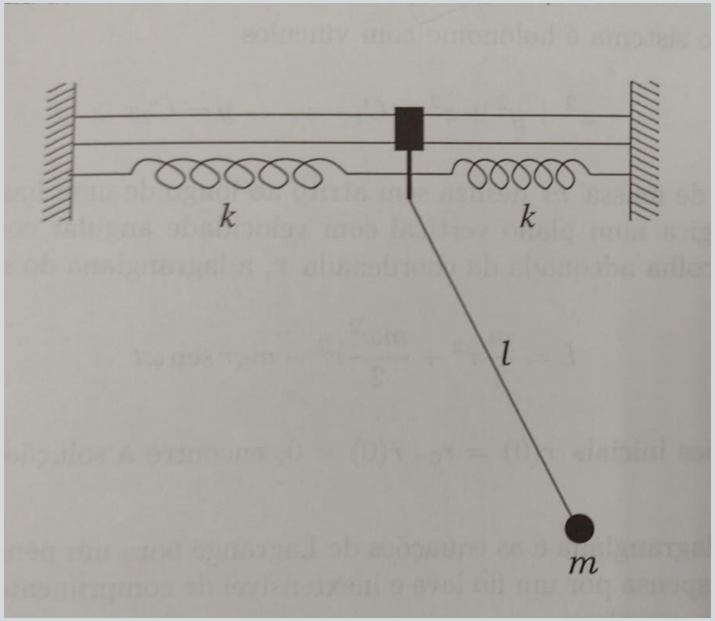


Figura 1.9: Máquina de Atwood oscilante do Problema 1.5 (M só se move verticalmente).

Aplicando o formalismo Lagrangiano:



Obrigada!

Minicurso: *Introdução à Mecânica Lagrangiana*

Profa. *Fátima A. Machado*

Departamento de Engenharias da Mobilidade | Centro Tecnológico de Joinville
Universidade Federal de Santa Catarina

SEPEX

UFSC
Joinville