

Campos elétricos

Da expressão [7], proveniente da lei de Coulomb aliada ao princípio de superposição, para a força eletrostática sobre uma carga pontiforme q devido a uma distribuição (fixa, pois estamos tratando de eletrostática) de cargas $\{(q_i, \vec{r}_i) : i = 1, \dots, N\}$:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad [7']$$

onde $\vec{r}_i$ é a posição da carga q_i em relação à q , decorre que a única característica associada ao corpo sobre o qual atua a força é o fator multiplicativo q , sendo o restante uma característica da distribuição de cargas $\{(q_i, \vec{r}_i)\}$ apenas.

Dessa forma, podemos tratar o corpo de carga q como uma carga de prova, sobre a qual atua uma força eletrostática que depende de uma carga q e de uma posição $\vec{r}$ no espaço de maneira expressa por:

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}), \quad [8]$$

onde a dependência espacial é decorrente da distribuição de cargas e expressa pelo vetor

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad [9]$$

lembrando que $\vec{r}_i$ é a posição do ponto $\vec{r}$ em relação à posição de cada carga q_i .

Sendo uma grandeza que assume um valor (vetorial) em cada ponto do espaço, $\vec{E}(\vec{r})$ consiste então no que se chama um campo (vetorial): ele é o campo elétrico da distribuição de cargas em questão.

Faz-se necessária, neste ponto, a seguinte hipótese de trabalho: que a distribuição de cargas $\{(q_i, \vec{r}_i)\}$ seja fixa, isto é, não se altere no tempo. Este é o pressuposto, e portanto o escopo da eletrostática, a qual desconsiderará então quaisquer efeitos da carga de prova q sobre a configuração de cargas que gera o campo elétrico dado por [9]. Tais efeitos serão possíveis de consideração quando tratarmos da eletrodinâmica, que abordará distribuições — e campos — variáveis no tempo, mas na qual persistirá o conceito de campo elétrico.

Dado então que, na eletrostática, o campo elétrico é dado por [9] e determina, por [8], a força elétrica sobre qualquer carga num dado ponto do espaço, cabe uma questão: se o campo elétrico é tão somente uma formalização da interação entre cargas, como sendo mediada por ele, ou se o campo elétrico é algo em si, tão real/físico como as cargas.

Tal questão é colocada por E. Purcell no volume de Eletricidade e Magnetismo do curso de Física de Berkeley, que propõe que tratemos os campos em questão como tão reais como os consideram aqueles que desenvolveram e proporcionaram grandes avanços na área, como Faraday e Maxwell, por exemplo.

Vamos adotar a mesma posição proposta por Purcell e acrescentar que, embora a questão transenda da Física à Filosofia da Ciência, a Física indica uma resposta com o desenvolvimento da teoria de campos, inclusive como paradigma para descrição da própria estrutura elementar da matéria.*

O campo elétrico é medido, no SI, em N/C, retratando seu significado de força por unidade de carga. Trabalhemos alguns exemplos para explorar mais o significado e as propriedades do campo elétrico gerado por configurações simples de cargas.

O caso particular mais simples é de uma carga pontiforme. Para descrever matematicamente o campo é necessário escolher um sistema de coordenadas. Nesse caso, se escolhermos um referencial com origem distinta da posição da carga que origina o campo, como ilustrado na Fig. 2, temos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{10}}{|\vec{r} - \vec{r}_{10}|^3},$$

onde $\vec{r}_{10}$ é a posição da carga segundo o referencial escolhido, e podemos notar que a expressão para o campo simplifica-se com uma escolha de referencial em que $\vec{r}_{10} = \vec{0}$ — isto é, com origem na própria carga, conforme ilustrado na Fig. 3. Assim:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = E(r) \cdot \hat{r}, \quad [10]$$

onde $\hat{r}$ e r coincidem, respectivamente, com o vetor e a coordenada radial do sistema de coordenadas esféricas (v. Fig. 3).

O fato de o campo depender apenas desta coordenada (i.e. $\frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \phi} = \vec{0}$) reflete que esta configuração de carga apresenta uma simetria — no caso, simetria esférica, que pode ser explorada, e também visualizada, em coordenadas esféricas.

(*) Videos: "Real World Telekinetics", Minute Physics & Neil Turok,
 "Theory of everything: What is Matter?", Minute Physics-

Fig. 2:

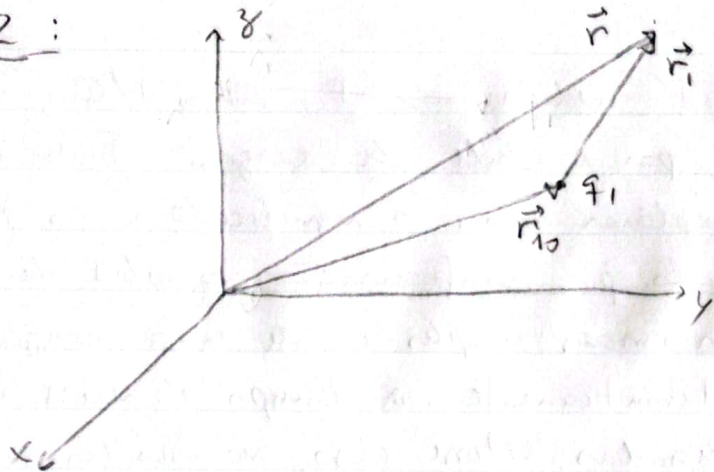
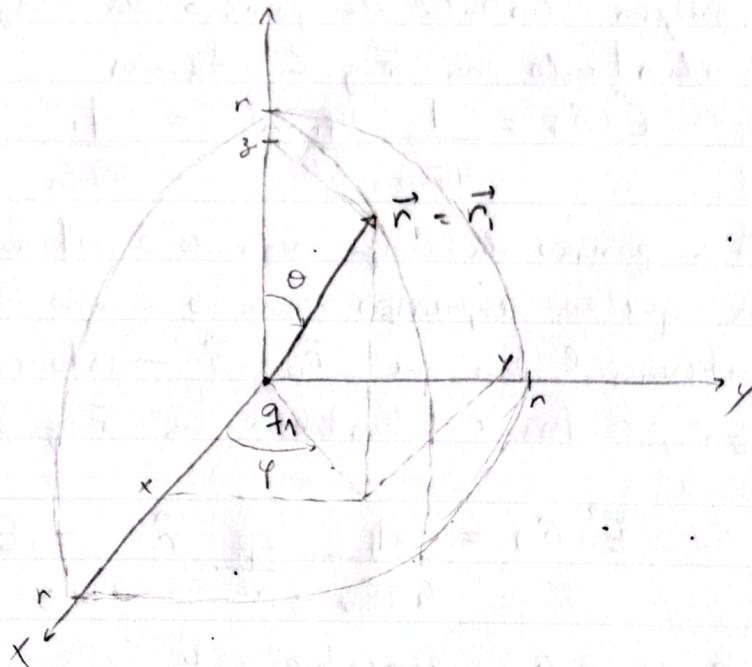


Fig. 3:



Em geral, é interessante primeiramente identificar se a configuração de cargas apresenta alguma simetria e, então, escolher o sistema de coordenadas de acordo.

Tomemos como próximo exemplo um dipolo: um sistema de duas cargas pontiformes, $+q$ e $-q$, onde, a partir deste ponto, subentenderemos qualquer " q " como o módulo da carga, de modo que $+q$ é uma carga positiva e $-q$ é uma carga negativa.

As posições destas duas cargas determina uma direção específica do espaço, enquanto todas as direções perpendiculares a ela são equivalentes entre si, havendo então simetria em torno do eixo definido pelas duas cargas - i.e. simetria axial.

Conveniente, portanto, escolhermos coordenadas cilíndricas com o eixo azimuthal (z) sobre as cargas, conforme ilustrado na Fig. 4, sendo conveniente também que as cargas estejam equidistantes da origem. Assim, o campo elétrico gerado por este dipolo será:

campo elétrico de dipolo em coordenadas cilíndricas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\hat{p} \left(\frac{1}{(p^2 + (z-d)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(p^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right) + \left(\frac{(z-d)}{(p^2 + (z-d)^2)^{3/2}} - \frac{(z+d)}{(p^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right) \hat{k} \right), \quad [11]$$

onde: $\vec{E}(p, \varphi, z) = \vec{E}(p, z)$ reflete a simetria axial.

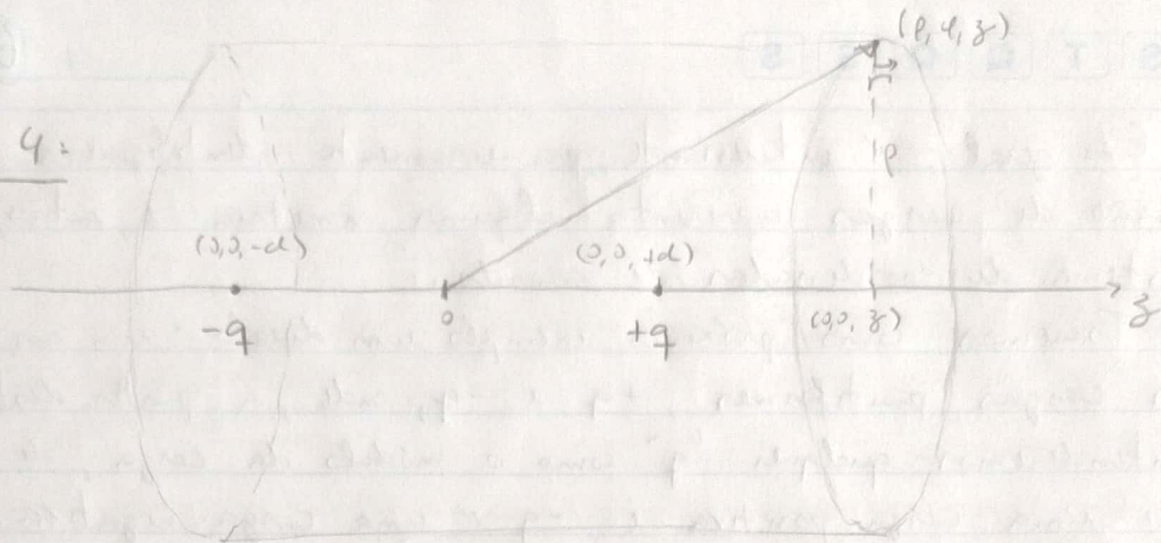
Destacam-se, em particular: o campo no plano $z=0$:

$$\vec{E}(p, 0) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qd}{(p^2 + d^2)^{3/2}} \hat{k}^*;$$

o campo sobre o eixo z para $|z| > d$:

$$\vec{E}(0, z) = + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qd \cdot z}{(z^2 - d^2)^2} \hat{k}^*;$$

Fig. 4:



(*) O fator $2qd \equiv p$ é o chamado momento de dipolo elétrico deste par de cargas.

o campo sobre o eixo z para $|z| < d$:

$$\vec{E}(0, z) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q(z^2 + d^2)}{(z^2 - d^2)^2} \hat{k}.$$

Caso as cargas formem $+2q$ e $-q$, ou $+q$ e $-2q$, teriam na expressão [11] um fator 2 nos termos com $(p^2 + (z-d)^2)^{-3/2}$, ou nos termos com $(p^2 + (z+d)^2)^{-3/2}$, respectivamente, de modo que no limite $|z| \gg d$:

$$\vec{E} = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p\hat{p} + z\hat{k}}{(p^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{d}{z}\right)^* = \frac{\pm q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{d}{z}\right) \approx \vec{E}(r),$$

onde não apenas manifesta-se simetria esférica, mas também o campo desta configuração tende (neste limite $|z| \gg d$) ao campo de uma carga puntiforme $+q$ ou $-q$, respectivamente, localizada na origem, como esperado caso as cargas estejam muito próximas em comparação à escala de distância considerada.

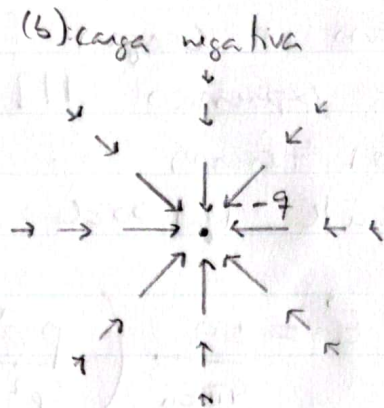
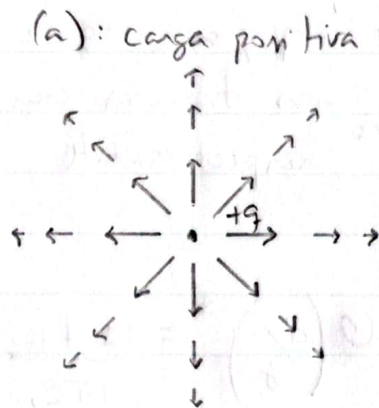
Embora o cálculo do campo seja de grande importância, também o é a sua visualização e interpretação. Iniciemos com o campo gerado por uma carga puntiforme $+q$ ou $-q$: o campo é radial para fora ou para dentro, respectivamente. A simetria esférica permite que qualquer plano que passe pela origem tenha o mesmo comportamento de $\vec{E}$. Representando então o campo elétrico de uma carga puntiforme no plano obtém-se a Fig. 5.

Esta figura é, no entanto, meramente qualitativa, uma vez que o campo dado por [10] varia com $1/r^2$. Sendo comum que uma representação quantitativamente fiel não provenha boa visualização, pode ser útil uma outra visualização qualitativa baseada na direção e no sentido do campo, o que pode ser obtido traçando-se linhas que são tangentes ao

(*) Expansão em série de Taylor em torno de $\frac{d}{z} = 0$.

(**) V. expansão [10].

Fig. 5:



campo em qualquer ponto do espaço : estas são as linhas de campo.

A Fig. 6 ilustra as linhas de campo geradas por uma carga puntiforme. As linhas de campo contêm um sentido atribuído de onde se lê o sentido do campo e, embora seja uma representação qualitativa, lê-se também que a intensidade do campo decresce com o afastamento das linhas, e cresce com a aproximação das linhas de campo.

Vale ressaltar que : as linhas de campo sempre divergem de cargas positivas e convergem para cargas negativas^{*}; e as linhas de campo não correspondem a trajetórias de cargas de prova, uma vez que, mesmo que a força elétrica seja a única atuante, a direção do campo (e portanto da linha de força) num dado ponto reza a direção da aceleração, e não da velocidade da carga de prova.

Para visualização das linhas de campo da distribuição de um dipolo ([11]), nota-se que a simetria axial ($\vec{E}$ independente de ϕ em coordenadas cilíndricas) permite que escolhamos como representativo qualquer plano contendo o eixo z em que está localizado o dipolo. Um esboço destas linhas de campo é apresentado na Fig. 7, onde se recomenda interpretar a equação [11] e as subseqüentes.

Por fim, observa-se que o campo de cargas puntiformes não é definido na localização das mesmas : $r=0$ em [10] e $z=\pm d$ em [11], o que decorre de uma densidade infinita de carga nesses pontos. De forma mais geral, podemos considerar distribuições de carga no espaço :

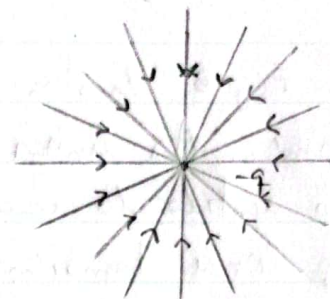
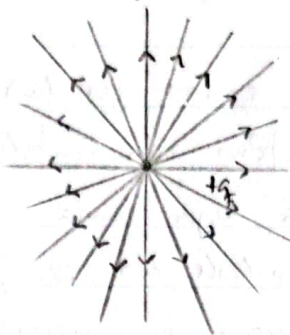
$$dq = \rho dv = \sigma da = \lambda dl,$$

cada elemento de carga correspondendo para um elemento de campo :

Fig. 6:

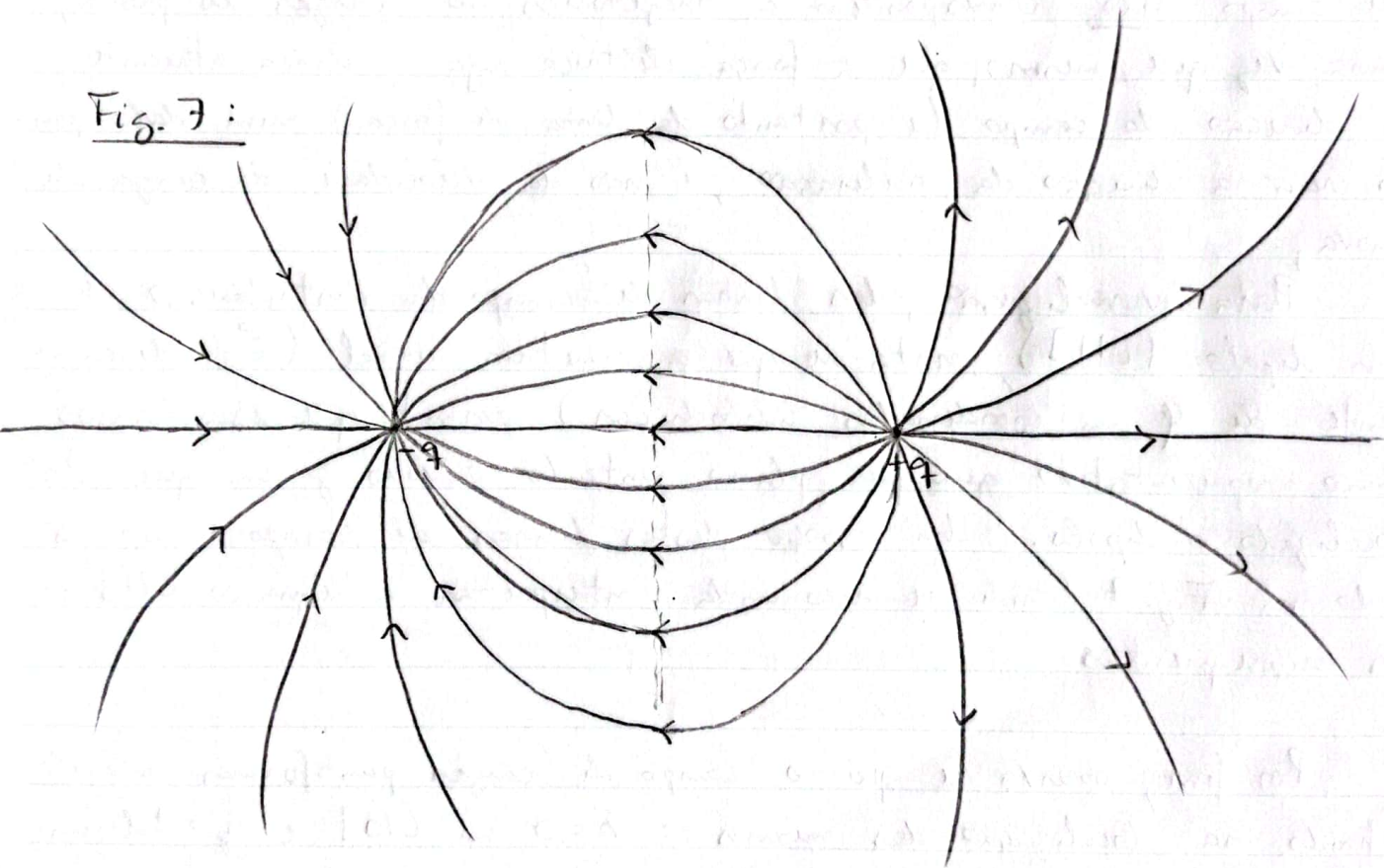
(a): carga positiva

(b): carga negativa



(*) Isto ficará mais claro e matematicamente preciso em breve, com a versão local da lei de Gauss.

Fig. 7:



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad [10']$$

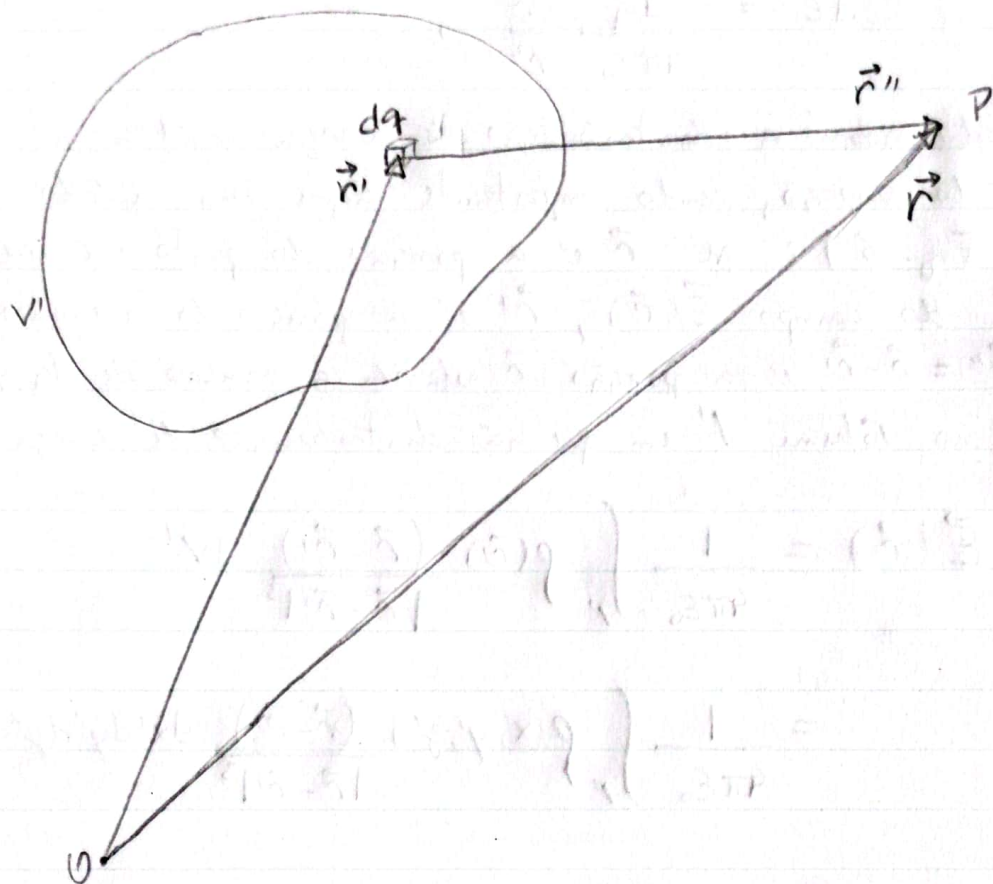
que integrado sobre a distribuição de carga resulta no campo num dado ponto do espaço, sendo importante aqui um cuidado com a notação (v. Fig. 8): se $\vec{r}$ é a posição do ponto em que se calcula o valor do campo $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{r}'$ é a posição do elemento de carga dq e $\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{r}'$ é a posição $\vec{r}$ relativa à posição de dq , então a integração no volume V' em que há distribuição de carga resulta em:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad [12]$$

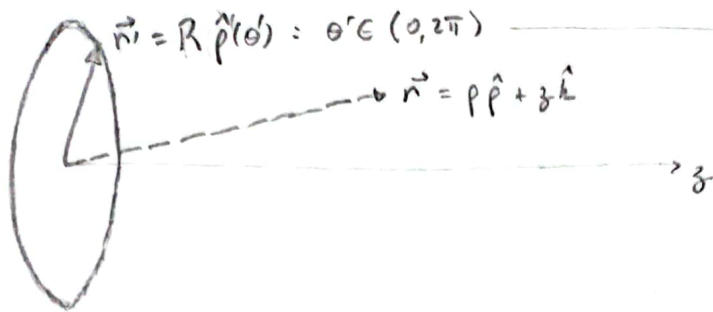
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(x', y', z') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dx' dy' dz'.$$

Façamos alguns exemplos para constância familiaridade e obter um melhor entendimento deste tipo de cálculos.

Fig. 8:



Exemplo: anel circular uniformemente carregado (raio R):



coordenadas cilíndricas:

$$\hat{p} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\hat{p}' = \cos\theta' \hat{i} + \sin\theta' \hat{j}$$

$$dl' = R d\theta'$$

Assim, para um ponto qualquer do espaço:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{anel}} dq' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \rightarrow \quad dq' = \lambda dl'$$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \hat{p} + z \hat{k} - R \hat{p}')}{|\rho \hat{p} + z \hat{k} - R \hat{p}'|^3} d\theta'$$

no denominador:

$$\begin{aligned} |\rho \hat{p} + z \hat{k} - R \hat{p}'|^2 &= (\rho \hat{p} + z \hat{k} - R \hat{p}') \cdot (\rho \hat{p} + z \hat{k} - R \hat{p}') \\ &= \rho^2 + z^2 + R^2 - 2\rho R \hat{p} \cdot \hat{p}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \hat{p} \cdot \hat{p}' &= \cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \cdot \sin\theta' = \cos(\theta - \theta') \\ &= \cos(\theta' - \theta). \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \hat{p} + z \hat{k} - R \cos\theta' \hat{i} - R \sin\theta' \hat{j}) d\theta'}{[\rho^2 + z^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \theta')]^{3/2}}$$

AVANÇADO

$\vec{E}(0,0,z)$ na próxima página.

Esta integral é de nível avançado: está associada a uma classe de integrais chamados elípticas, além do escopo de Física III — este exemplo aqui objetiva apenas ilustrar a construção da integral, discernindo as variáveis $\text{em } (\vec{r}', \text{ ponto em que avaliamos o campo elétrico})$ e $\text{em } (\vec{r}, \text{ que medeia a distribuição de carga})$.

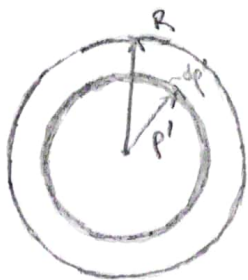
Caso, no entanto, alguém se interesse pela resolução, sugiro o artigo em arxiv.org/pdf/2106.01330.

AVANÇADO

Sobre o eixo z , $p=0$ e a integral simplifica-se para:

$$\begin{aligned}\vec{E}(0,0,z) &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{k} - R\cos\theta'\hat{i} - R\sin\theta'\hat{j}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\theta' \\ &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left[z\hat{k} \int_0^{2\pi} d\theta' - R\hat{i} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta' d\theta'}_0 - R\hat{j} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta' d\theta'}_0 \right] \\ &= \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}, \text{ expressão que serve de base aos próximos exemplos.}\end{aligned}$$

Exemplo: campo elétrico de um disco circular:



Agora, o campo de um anel de raio p' e espessura infinitesimal dp' e um elemento do campo gerado por um disco:

$$d\vec{E}_{\text{disco}} = \vec{E}_{\text{anel}}, \text{ onde agora integra-}$$

remos em $p' \in (R_{\text{int}}, R_{\text{ext}})$, com distribuições de carga superficial σ dada

por:

$$\begin{aligned}dq' &= \lambda dl' = \sigma da' \\ &= \sigma dl' dp' \Rightarrow \lambda = \sigma dp',\end{aligned}$$

$$\therefore d\vec{E}(0,0,z) = \frac{(\sigma dp') p'}{2\epsilon_0} \frac{z\hat{k}}{(z^2 + p'^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(0,0,z) = \frac{z\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} \frac{\sigma p' dp'}{(z^2 + p'^2)^{3/2}}$$

Se o disco for uniformemente carregado, σ é constante e

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z \hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \frac{\rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

fazendo $u = z^2 + \rho'^2$
 $du = 2\rho' d\rho'$
 $\rho' = R_{int} : u = z^2 + R_{int}^2$
 $\rho' = R_{ext} : u = z^2 + R_{ext}^2$

$$= \frac{\sigma z \hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{z^2 + R_{int}^2}^{z^2 + R_{ext}^2} \frac{\frac{1}{2} du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z \hat{k}}{4\epsilon_0} \left[-2u^{-1/2} \right]_{z^2 + R_{int}^2}^{z^2 + R_{ext}^2}$$

$$= \frac{\sigma z \hat{k}}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R_{int}^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R_{ext}^2}} \right)$$

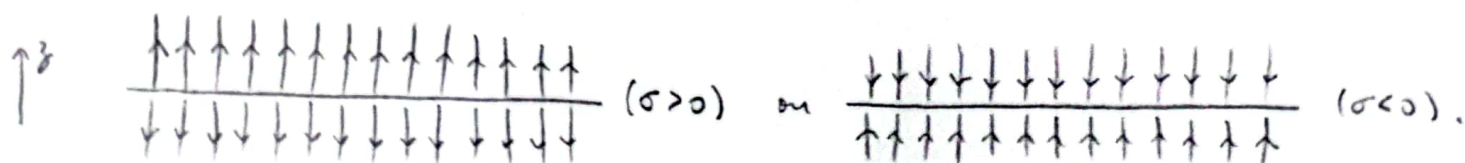
Fazendo, para um disco maciço, $R_{int} = 0$ e $R_{ext} = R$,

$$\therefore \vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right) \hat{k} \quad (D1)$$

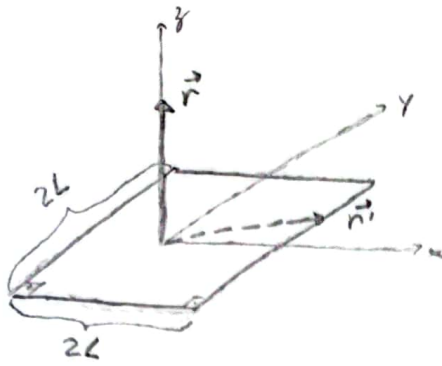
Para pontos muito próximos ao disco ("plano infinito"), $z \ll R$ e, fazendo o limite $\frac{R}{z} \rightarrow \infty$:

$$\vec{E}(0,0,z \ll R) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{k} \quad (D2)$$

Vemos, tanto por (D1) como por (D2), que as linhas de campo "saem" (se $\sigma > 0$) ou "entram" (se $\sigma < 0$) do disco em sua vizinhança, como esperado. No caso (D2), para um plano infinito não há distinção do eixo z (pode estar equivalentemente "em qualquer lugar"), e portanto as linhas de campo têm a seguinte forma:



Exemplo: campo elétrico gerado por um fio quadrado uniformemente carregado:



Vamos restringir $\vec{r}$ ao eixo z .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{x+} + \vec{E}_{x-} + \vec{E}_{y+} + \vec{E}_{y-}$$

campo devido ao pedaço de fio em $x = +L$.

$$\vec{r}' = +L\hat{i} + y'\hat{j} : y' \in (-L, L)$$

$$\vec{E}_{x+}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} dy' \frac{\lambda(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Densidade linear constante:

$$dq' = \lambda dl'$$

$$= \lambda dy' \text{ para este pedaço}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{(z\hat{k} - L\hat{i} - y'\hat{j})}{(z^2 + L^2 + y'^2)^{3/2}} dy'$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[(z\hat{k} - L\hat{i}) \int_{-L}^L \frac{dy'}{(z^2 + L^2 + y'^2)^{3/2}} - \hat{j} \int_{-L}^L \frac{y' dy'}{(z^2 + L^2 + y'^2)^{3/2}} \right]$$

podem ver o passo a passo da integração no WolframAlpha

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[(z\hat{k} - L\hat{i}) \frac{2L}{(z^2 + L^2)\sqrt{z^2 + 2L^2}} - \hat{j} \cdot 0 \right]$$

integrando ímpar no intervalo de integração

Em particular, em $z=0$: $\vec{E}_{x+}(\vec{0}) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{L\sqrt{2}} \hat{i}$.

Retornando ao caso $\vec{r}=(0,0,z)$ para somar as contribuições das quatro pedacinhos de fio, temos que

$$\vec{E}_{x-}(0,0,z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[(z\hat{k} + L\hat{i}) \frac{2L}{(z^2 + L^2)\sqrt{z^2 + 2L^2}} - \hat{j} \cdot 0 \right],$$

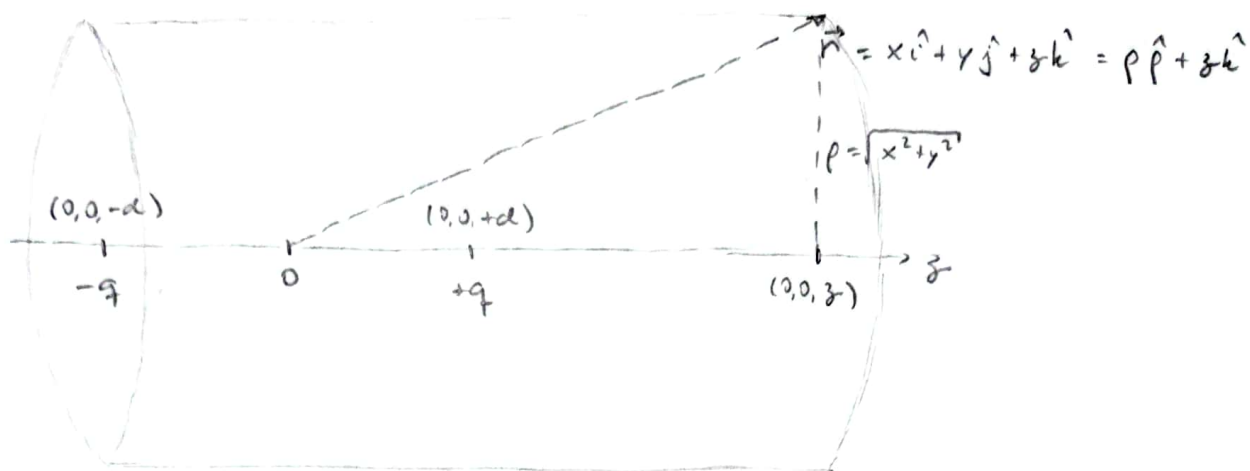
de modo que $\vec{E}_{x+} + \vec{E}_{x-} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot (z\hat{k}) \frac{2L}{(z^2+L^2)\sqrt{z^2+2L^2}}$

$$= \frac{\lambda L z}{\pi\epsilon_0 (z^2+L^2)\sqrt{z^2+2L^2}} \hat{k} \text{ sobre o eixo } z,$$

que por simetria será igual a soma $\vec{E}_{y+} + \vec{E}_{y-}$.

$$\therefore \vec{E}(0,0,z) = \frac{2\lambda L z}{\pi\epsilon_0 (z^2+L^2)\sqrt{z^2+2L^2}} \hat{k}.$$

Exemplo: campo elétrico gerado por um dipolo:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (z-d)\hat{k}}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (z+d)\hat{k}}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[(x\hat{i} + y\hat{j}) \left(\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right) + \hat{k} \left(\frac{(z-d)}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{(z+d)}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right) \right]$$

dependência vetorial em (x,y) na forma $x\hat{i} + y\hat{j} = \rho\hat{\rho}$
e dependência escalar em (x,y) na forma $x^2 + y^2 = \rho^2$: manifestações da simetria cilíndrica do sistema.

Logo, sendo $u \equiv d/z$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\rho\hat{\rho} \left(\frac{1}{[\rho^2 + z^2(1-u)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[\rho^2 + z^2(1+u)^2]^{3/2}} \right) + z\hat{k} \left(\frac{(1-u)}{[\rho^2 + z^2(1-u)^2]^{3/2}} - \frac{(1+u)}{[\rho^2 + z^2(1+u)^2]^{3/2}} \right) \right]$$

é a expressão para o campo elétrico de um dipolo em qualquer ponto do espaço (exceto pela localização das cargas).

Utilizando as expansões em série de Taylor:

$$\frac{1}{[r^2 + z^2(1 \pm u)^2]^{3/2}} = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mp u \cdot \frac{3z^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} + \mathcal{O}(u^2)$$

AVANÇADO

$$\frac{(1 \pm u)}{[r^2 + z^2(1 \pm u)^2]^{3/2}} = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \pm u \frac{(r^2 - 2z^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}} + \mathcal{O}(u^2),$$

temos, até primeira ordem em $u = d/z \ll 1$ (i.e., para distâncias dos dipolos muito maiores que a separação entre as cargas que o constituem):

$$\vec{E}(r, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\hat{r} \left(\frac{6z^2 r}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right) u + \hat{k} \left(\frac{z(2z^2 - r^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \right) u \right] + \mathcal{O}(u^2),$$

O que permite avaliar a ordem de grandeza das componentes do campo elétrico conforme a ordem de grandeza da distância do dipolo:

sendo $r = \sqrt{r^2 + z^2}$, vamos considerarmos para grandes valores de r :

$$\bullet z \sim r \sim r : \vec{E} \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{6}{r^2} u \hat{r} + \frac{1}{r^2} u \hat{k} \right) \Rightarrow E \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6}{r^2} \cdot \frac{d}{r};$$

$$\bullet z \sim r \text{ e } p \sim 1 : \vec{E} \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{6}{r^3} u \hat{r} + \frac{2}{r^2} u \hat{k} \right) \Rightarrow E \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r^2} \cdot \frac{d}{r};$$