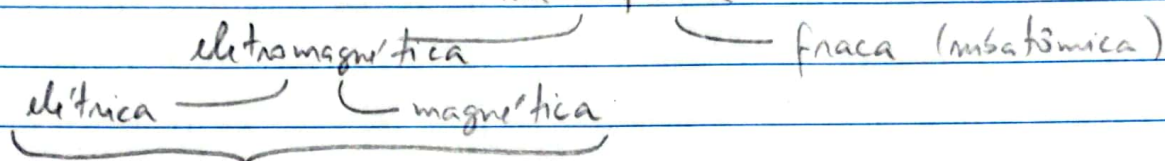


Lei de Coulomb e campo elétrico

Interações fundamentais : - gravitacional (astronômica)
 - forte (nuclear)
 - eletrofraca



É mais presente nas escalas de fenômenos cotidianos: as forças de contato, como descritas macroscopicamente, no contexto da mecânica newtoniana, como por exemplo as forças normal, atrito e tração/tensão, são de natureza fundamentalmente eletromagnética, mas na escala intermolecular.

Embora a descrição dos fenômenos eletromagnéticos da escala intermolecular à atômica recorre na aliado à mecânica quântica, e a descrição em escalas subatômicas recorre do formalismo da teoria quântica de campos (i.e. a eletrodinâmica quântica), tais descrições consistem nas aplicações, em diferentes formalismos, das mesmas leis que descrevem o eletromagnetismo clássico, cujos fundamentos e construção histórica tiveram base empírica na escala de fenômenos macroscópicos.

A sistematização do conhecimento dos fenômenos eletromagnéticos tem um marco inicial no século XVIII, com o conceito de carga elétrica, estabelecido a partir da observação de padrões nas interações entre objetos após o processo de eletrização por atrito, por sua vez observado desde o período da Grécia antiga, contexto este que deu origem aos termos "eletricidade", "elétrico" e derivados.

Sem conhecimentos da estrutura da matéria, os séculos XVIII acumulavam-se observações de eletrização por atrito com diversos materiais, usualmente classificados como "vítreos" ou "resinosos".

A categorização em duas classes de materiais corroborou-se com a acumulada observação de que, digamos, se um corpo A atrai um corpo B, e este por sua vez repelia um corpo C, então A atrai também o corpo C. Assim B e C estavam na mesma classe (de atraídos por A), e corpos desta mesma classe repeliavam-se entre si.

Além disso, se A atrai B mas B atrai D, observava-se A repelir D, o que colocaria A e D numa mesma classe (de atraídos por B) e que repeliavam-se entre si.

A síntese das observações empíricas seguia, assim, as lógicas abaixo:

$$(A \text{ atrai } B) \wedge (B \text{ repeli } C) \Rightarrow (A \text{ atrai } C), [1]$$

e

$$(A \text{ atrai } B) \wedge (B \text{ atrai } D) \Rightarrow (A \text{ repeli } D). [2]$$

As lógicas acima adiciona-se que

$$(A \text{ repeli } D) \wedge (D \text{ repeli } E) \Rightarrow (A \text{ repeli } E)$$

o que coloca E na mesma classe de A e D, uma vez que se repeliem, sendo que em tais casos a observação experimental é de que este corpo E seria, por sua vez, atraído tanto por B como por C, corroborando-se então uma categorização na classe dos atraídos por B:

$$(A \text{ repeli } D) \wedge (D \text{ repeli } E) \wedge (A \text{ atrai } B) \Rightarrow (A \text{ repeli } E) \wedge (B \text{ atrai } E) [3].$$

O fato de que todos experimentos avaliando as interações entre corpos eletrizados seguiu alguma das lógicas [1], [2] ou [3] corroborava uma classificação em duas — e apenas duas classes. Já a atribuição, dentre quaisquer valores binários possíveis, justamente dos valores "positivo e negativo" se fundamenta na inferência, a partir das observações da época (séc. XVIII), de que o processo de eletrização por atrito não somente transfere — e nunca cria ou destrói — determinada característica de eletrização de

um corpo para outro. A tal característica dá-se o nome de "carga" — ou mais precisamente "carga elétrica" — que pode estar ou positiva ou negativa, podendo ser transferida entre corpos, e apresentando a propriedade de que corpos de mesmo sinal de carga (mesma classe, na categorização anterior) se repelem, ao passo que corpos de cargas de sinais opostos (de classes distintas) se atraem.

eletroscópio e eletrização por indução eletrostática

Algumas décadas depois, ainda no século XVIII, experimentos quantitativos foram realizados, permitindo a conclusão — fundamentalmente empírica — de que a interação entre dois pequenos corpos eletricamente carregados é proporcional a ambas as cargas e inversamente proporcional ao quadrado* da distância entre eles:

$$F_{ee} \propto \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2}, \quad [4]$$

onde rotulamos os corpos por "1" e "2", denominamos suas cargas elétricas " q_1 " e " q_2 ", respectivamente, e

$r_{21} = |\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, onde $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ é a posição do corpo 2 em relação ao corpo 1, conforme ilustrado na Fig. 1.

A constante de proporcionalidade^(k) estabelecida pela relação [4] tem valor, naturalmente, dependente do sistema de unidades adotado e relacionado à definição da unidade de carga elétrica num dado sistema.

No sistema CGS, a medida da força elétrica em dinas entre dois corpos cuja distância é medida em centímetros, junto a $k \equiv 1$, define a unidade eletrostática (mes) de carga.

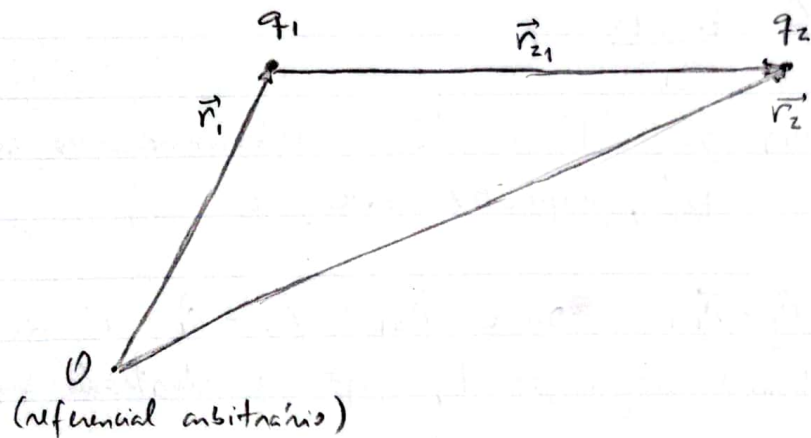
Já no Sistema Internacional (SI), a unidade de carga elétrica é o coulomb (C)** de modo que a medida da força elétrica

$$(*) \quad F_e \propto r_{21}^{-(2+\delta)}, \quad \text{com: } |8| < 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \sim 1770$$

$$|8| < 3 \cdot 10^{-16} \text{ cm} \sim 1970,$$

$$(**) \quad 1C = 2,99792458 \cdot 10^9 \text{ mes.}$$

Fig. 1:



em Newtons entre dois corpos, de cargas medidas em Coulombs e cuja distância é medida em metros resulta numa medida desta constante, atualmente dada por:

$$k = 8,98755 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad [5-a]$$

$$= 10^{-7} \text{ C}^2 \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2 \quad [5-b]$$

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0}, \quad [5-c]$$

onde $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo (o que já sugere uma conexão entre a luz e fenômenos elétricos) e ϵ_0 é a permissividade (elétrica) do vácuo, com tais ingredientes das expressões [5-b] e [5-c] para a constante eletrostática k a serem detalhados posteriormente no desenvolvimento da teoria eletromagnética.

Quanto à direção da força elétrica, se partirmos dos pressupostos: que a expressão [4] vale para objetos puntiformes (na prática, de dimensões muito menores que r_{12}) e sem qualquer subestrutura que especifique alguma direção espacial; e que o espaço em si é isotrópico (i.e. todas as direções são equivalentes a priori), então a única direção possível de ser definida por dois pontos deve ser a direção da força elétrica: logo, esta deve ter a mesma direção da reta que une as posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, que é precisamente a direção de $\vec{r}_{21}$, ilustrado na Fig. 1.

Por fim, quanto ao sentido, vem a uso a categorização de todo e qualquer corpo que interage eletricamente como tendo carga (elétrica, a ficar subentendido deste ponto em diante) ou positiva, ou negativa, e que cargas de mesmo sinal (mesma "classe") se repelem e cargas de sinais opostos ("classes" distintas) se atraem:

$$\begin{cases} q_1 \cdot q_2 > 0 \Rightarrow \text{força repulsiva} \\ q_1 \cdot q_2 < 0 \Rightarrow \text{força atrativa} \end{cases}$$

Sendo assim, retornando - se novamente à Fig. 1, tem - se então a expressão vetorial da força elétrica (ou, mais precisamente, eletrostática) sobre o corpo "2" devido ao corpo "1", no SI:

$$\vec{F}_{2(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}, \quad [6] \quad [\text{Lei de Coulomb}]$$

onde $\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$.

Trocando os rótulos "2" e "1" na expressão [6], nota - se, uma vez que $r_{12} = r_{21}$ e $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$, que a lei de Coulomb é consistente com a Terceira lei de Newton:

$$\vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)}.$$

O conhecimento da interação eletrostática entre um par de cargas pontiformes não é, por si só, suficiente para descrevermos um sistema com mais do que este par. Para a descrição de sistemas mais elaborados, partimos do seguinte princípio: de que a força entre um par de cargas não é afetada pela presença de uma terceira carga, e que as forças numa carga devido a diversas outras se somam.

Assim, a força sobre uma carga "i" devido a diversas outras "j" ($j = 1, 2, 3, \dots$) será dada por:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i(j)} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}. \quad [7]$$

Tal princípio é o chamado "princípio de superposição", e tem como implicação que o efeito do acúmulo de cargas, na vizinhança de

em mesmo ponto, é aditivo: superponhamos duas cargas, "1" e "2", muito próximas ($\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2$) e interagindo com uma terceira, "3", sobre a qual a força atua, portanto:

$$\vec{F}_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{31}^2} \hat{r}_{31} + \frac{q_2}{r_{32}^2} \hat{r}_{32} \right) = \frac{q_3(q_1+q_2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{31}}{r_{31}^2}.$$

De forma mais ampla, no entanto, o princípio de superposição permite que se descreva quaisquer sistemas eletrostáticos, inclusive com distribuições contínuas de carga, seja no espaço, numa área, ou numa direção:

$$dq = \underbrace{\rho dV}_{\substack{\text{densidade} \\ \text{volumétrica} \\ \text{de carga}}} = \underbrace{\sigma da}_{\substack{\text{densidade} \\ \text{superficial} \\ \text{de carga}}} = \underbrace{\lambda dl}_{\substack{\text{densidade} \\ \text{linear de carga}}},$$

integrando-se nos eixos sobre qualquer outra carga.

Exemplo 2.2 do Moyn's com coordenadas cilíndricas → p. 6 ex.

O tratamento de distribuições contínuas de carga, em contraste com a quantização da carga elétrica (fato empírico de que toda carga observada é múltiplo inteiro da carga eletrônica e), é consistente na escala da carga do elétron:

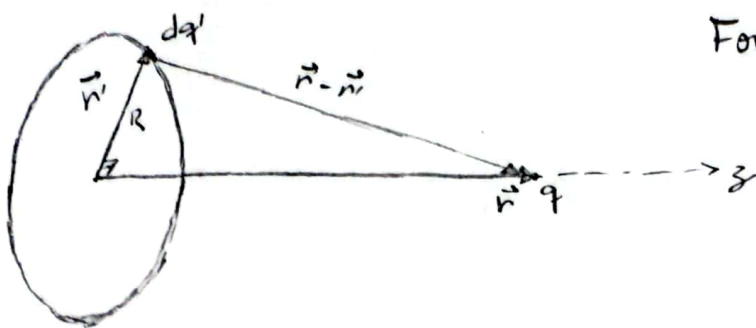
$$e = 1,602177 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

de modo que cada 1C de carga elétrica corresponde ao excesso (-1C) ou ao déficit (+1C) de $6,24 \cdot 10^{18}$ elétrons, sendo o limite contínuo portanto uma boa aproximação para escalas macroscópicas.

O entendimento da quantidade de carga de um corpo como o excesso ou déficit de elétrons, proporcionado pelo conhecimento da estrutura da matéria, possibilita a descrição, mesmo que qualitativa, de materiais

condutores como aqueles pelos quais elétrons fluem mais fácil e rapidamente, e de materiais isolantes como aqueles que, por terem fluxo de elétrons muito menor, tendem a reter uma carga elétrica por mais tempo.

Sendos assim, fenômenos com condutores podem envolver redistribuições de carga num objeto, como ocorre no processo de eletrização por indução num eletroscópio.



Força eletrostática de p. 6 ex.
um anel uniformemente carregado
sobre uma carga pontual
situada sobre seu eixo de simetria.

Elemento de carga $dq' = \lambda dl' = \lambda R d\varphi'$, sendo a carga total do
anel: $Q = \int dq' = \lambda R \int_0^{2\pi} d\varphi' \Rightarrow \lambda = \frac{Q}{2\pi R}$.

Força sobre q devido a um elemento de carga:

$$d\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} dq' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{anel}} \lambda dl' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \text{ onde, em coordenadas cilíndricas:}$$

$$\begin{cases} \vec{r}' = R \hat{\rho}'(\varphi') \\ \vec{r} = z \hat{k} \end{cases},$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{q\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{(z\hat{k} - R\hat{\rho}')}{|z\hat{k} - R\hat{\rho}'|^3}$$

$$= \frac{q\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{(z\hat{k} - R\cos\varphi'\hat{i} - R\sin\varphi'\hat{j})}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{q\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left[\hat{i} \underbrace{\left(-R \int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi'\right)}_{-R\sin\varphi' \Big|_0^{2\pi} = 0} + \hat{j} \underbrace{\left(-R \int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi'\right)}_{+R\cos\varphi' \Big|_0^{2\pi} = 0} + \hat{k} \underbrace{\left(z \int_0^{2\pi} d\varphi'\right)}_{z\varphi' \Big|_0^{2\pi}}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{q\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 z^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right)^{-3/2} \hat{k} \xrightarrow{R/z \rightarrow 0} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Expandindo em série de Taylor:

$$\vec{F} = \hat{k} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R^2}{z^2} + \frac{15}{8} \frac{R^4}{z^4} + O\left(\left(\frac{R}{z}\right)^6\right) \right].$$