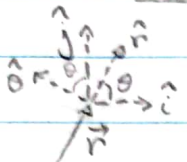


Ferramental matemático

Sistemas de coordenadas:

2D: Coordenadas e vetores cartesianos: (x, y) , $(\hat{i}, \hat{j})$



$$\boxed{\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}} \quad ; \quad \boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2}$$

(POSICÃO) (ELEMENTO DE DISTÂNCIA)²

Coordenadas e vetores polares: (r, θ) , $(\hat{r}, \hat{\theta})$

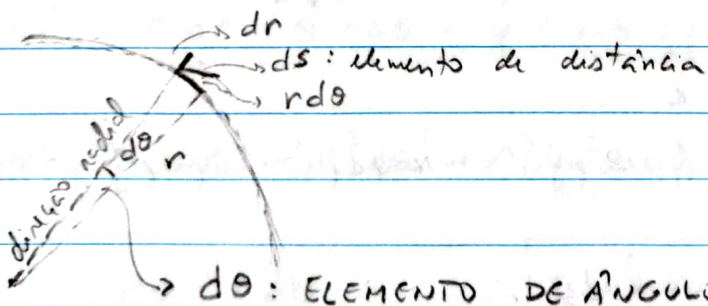
$$\boxed{\vec{r} = r \hat{r}} \quad , \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 & , \quad \theta = \arctan(y/x) \\ x = r \cos \theta & , \quad y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$ds^2 = \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 - 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + \sin^2 \theta dr^2 + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 + 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta$$

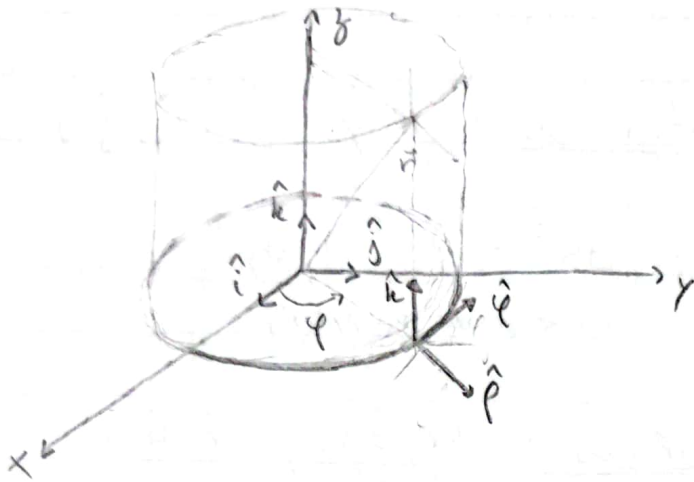
$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2}$$



ELEMENTO DE ÁREA

$$\boxed{dA = dx dy = r dr d\theta}$$

3D: Coordenadas e versores cartesianos: (x, y, z)
 $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$$

Coordenadas e versores cilíndricos: (ρ, φ, z)
 $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{k})$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \varphi = \arctg(y/x) \end{cases}$$

↓

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$\begin{cases} \hat{\rho} = \cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j} \\ \hat{\varphi} = -\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j} \end{cases}$$

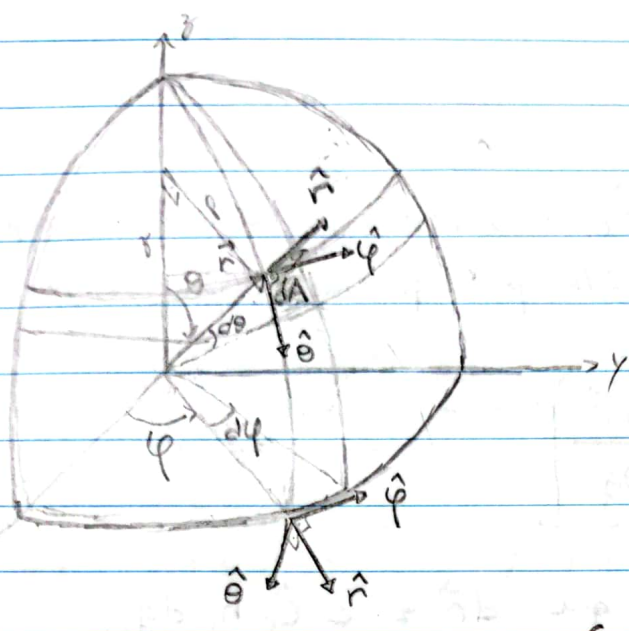
$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$$d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\hat{\rho} + dz\hat{k}$$

$$\hookrightarrow d(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}) = -\sin\varphi d\varphi\hat{i} + \cos\varphi d\varphi\hat{j} = d\varphi\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \hat{\rho}d\rho + \hat{\varphi}\rho d\varphi + \hat{k}dz$$

Coordenadas e versores esféricos: (r, θ, φ)
 $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$



$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \theta = \arccos(z/r) \\ \varphi = \arctg(y/x) \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{r} = r \hat{r}}$$

DEDUZINDO:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ &= r \cos\varphi \hat{i} + r \sin\varphi \hat{j} + z\hat{k} \\ &= r \sin\theta \cos\varphi \hat{i} + r \sin\theta \sin\varphi \hat{j} + r \cos\theta \hat{k} \\ &= r \hat{r}, \text{ enquanto } \hat{\theta} = d\hat{r}/d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin\theta \cos\varphi \hat{i} + \sin\theta \sin\varphi \hat{j} + \cos\theta \hat{k} \\ \hat{\theta} = \cos\theta \cos\varphi \hat{i} + \cos\theta \sin\varphi \hat{j} - \sin\theta \hat{k} \\ \hat{\varphi} = -\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{r} &= d(r\hat{r}) = dr\hat{r} + r(d\hat{r}) = dr\hat{r} + r\left(\frac{d\hat{r}}{d\theta}d\theta + \frac{d\hat{r}}{d\varphi}d\varphi\right) \\ &= dr\hat{r} + r(\hat{\theta}d\theta + (-\sin\theta \sin\varphi \hat{i} + \sin\theta \cos\varphi \hat{j})d\varphi) = dr\hat{r} + r\hat{\theta}d\theta + r\sin\theta \hat{\varphi}d\varphi \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{d\vec{r} = \hat{r}dr + \hat{\theta}r d\theta + \hat{\varphi}r \sin\theta d\varphi}$$

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2}$$

$$\begin{aligned} dA &= \rho d\varphi \cdot r d\theta \\ &= r \sin\theta d\varphi \cdot r d\theta \\ &= r^2 \sin\theta d\varphi d\theta \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

ELEMENTO DE ÁREA

$$\boxed{dA = r^2 d\Omega}$$

ELEMENTO DE ÂNGULO SÓLIDO

$$\boxed{d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi}$$

$$\boxed{dV = r^2 dr d\Omega}$$

ELEMENTO DE VOLUME

Generalizando, para sistemas de coordenadas curvilíneas
(e ortogonais):

Coordenadas: q_1, q_2, q_3 .

Vectores: $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ($\hat{e}_i$ é o vetor normal à superfície definida por q_i constante, no sentido crescente).

Fatores de escala: $h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$

tais que $d\vec{r} = \sum_i \hat{e}_i h_i dq_i$

e $ds_i = h_i dq_i$, $dV = ds_1 ds_2 ds_3$.

$$\therefore \hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i},$$

e temos, para os sistemas de coordenadas vistos:

- Cartesianas: $h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$.

- Cilíndricas: $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$.

- Esféricas: $h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta$.

Esta generalização será referenciada no tratamento de operadores vetoriais, introduzidos a seguir.

Operadores vetoriais:

Operador diferencial $\vec{\nabla} := \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$

Agindo sobre uma função escalar $f(x, y, z)$:

$$\vec{\nabla} f = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad \underline{\text{GRADIENTE DE } f}$$

$\therefore df = (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r}$, o que por sua vez implica que

$$df = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f \perp d\vec{r}, \text{ isto é,}$$

$\vec{\nabla} f$ é ortogonal a qualquer superfície em que $f = \text{constante}$.

Ainda, na vizinhança de um dado ponto (x, y, z) , df será maximizado para $d\vec{r}$ paralelo a $\vec{\nabla} f$: logo, o gradiente de uma função é um vetor cuja direção é aquela em que f tem a maior taxa de variação em cada ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

O operador $\vec{\nabla}$ pode agir sobre uma função vetorial $\vec{V}(x, y, z)$ de duas formas: com o produto escalar ou com o produto vetorial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \underline{\text{DIVERGENTE DE } \vec{V}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \hat{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad \underline{\text{ROTACIONAL DE } \vec{V}}$$

As interpretações do divergente e do rotacional estarão presentes no curso de Física 3, e podem ser encontradas nos resultados matemáticos a seguir.

• Teorema de Gauss:

$$\oint_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\phi$$

$\oint_S$ → SUPERFÍCIE FECHADA
 $d\vec{\sigma}$ → ELEMENTO DE ÁREA
 $\int_V$ → VOLUME COMPREENDIDO PELA SUPERFÍCIE S
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ → ELEMENTO DE VOLUME
 fluxo do campo vetorial $\vec{V}$ através de S.

$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x, y, z)$: fluxo por unidade de volume do campo vetorial $\vec{V}$ na vizinhança do ponto (x, y, z) !

• Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma}$$

$\oint_C$ → INTEGRAL DE LINHA SOBRE A CURVA FECHADA C
 $d\vec{\ell}$ → ELEMENTO DE ÁREA
 $\int_S$ → SUPERFÍCIE COMPREENDIDA PELA CURVA C
 circulação do campo vetorial $\vec{V}$ ao longo de C.

↳ Para um dado ponto $\vec{r}$ do espaço, a componente do rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})$ numa dada direção $\hat{n}$ é a circulação por unidade de área, num elemento de área $d\vec{a} = da \cdot \hat{n}$ na vizinhança de $\vec{r}$:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{n} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\ell}}{a}, \text{ onde a convergência de sinal é}$$

com $\hat{n}$ determinado pelo sentido da circulação C pela regra da mão direita. Consequentemente, a direção de $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ é aquela normal ao plano de máxima circulação na vizinhança de um ponto!

Outro resultado importante para campos vetoriais é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} \equiv \vec{0} \iff \exists f(x,y,z) : \vec{V} = -\vec{\nabla} f.$$

No contexto de mecânica esta relação define o que é uma força conservativa e que a toda força conservativa pode-se associar uma função potencial. Isto será aplicado também ao campo elétrico.

Por fim, a generalização do operador $\vec{\nabla}$ para outros sistemas de coordenadas é dada por:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3}$$

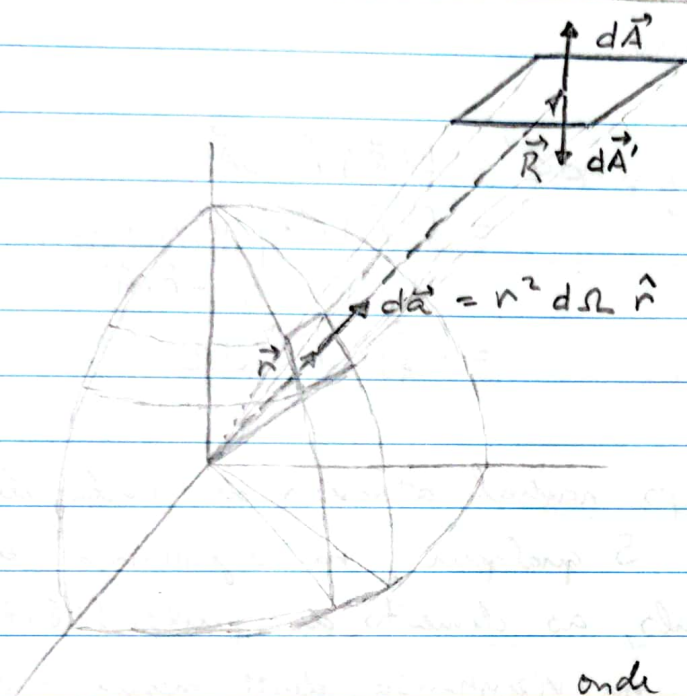
Isto é, para coordenadas cilíndricas e esféricas, respectivamente:

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Fluxo de um campo vetorial através de diferentes superfícies

I) Relação entre elementos de área:



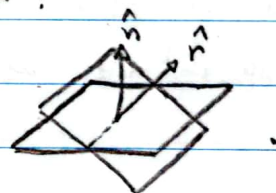
$d\vec{A}$: elemento de uma superfície S fechada, com o interior da superfície para $r < R$.

$d\vec{A}'$: elemento de uma superfície S fechada, com o interior da superfície para $r > R$.

$$\begin{cases} d\vec{A} = dA \hat{n} \\ d\vec{A}' = dA \hat{n}' \end{cases}$$

com $dA = R^2 d\Omega \cdot \zeta$,

onde ζ é um fator dependente da orientação do elemento de área $d\vec{A}$ (ou $d\vec{A}'$) em relação ao elemento de área $R^2 d\Omega \hat{n}$:

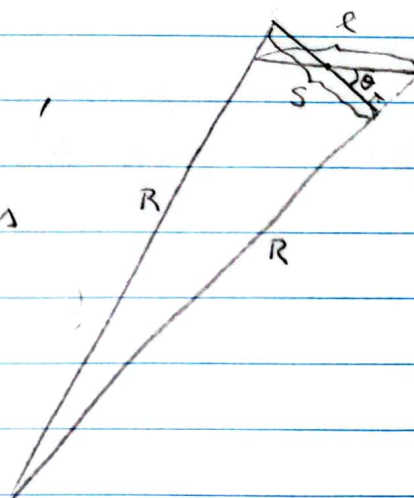
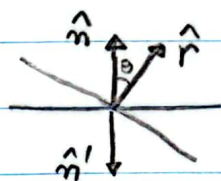


Um corte transversal a estes elementos de área, perpendicularmente à sua interseção, é ilustrada abaixo, de onde se infere que:

$$\zeta = \frac{l}{S} = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\hat{n} \cdot \hat{n}'} = \frac{-1}{\hat{n} \cdot \hat{n}'},$$

onde θ é o menor ângulo entre os planos e os vetores $\hat{n}$, $\hat{n}$ e $\hat{n}'$ ilustram-se

como:



II) Fluxo através dos elementos de área:

Se estivermos interessados no fluxo de um campo radial $f(\vec{r})\hat{r}$ através desses elementos de área na vizinhança de um ponto $\vec{R}$, temos os seguintes elementos de fluxo:

$$\begin{aligned}d\Phi &= f(\vec{R})\hat{r} \cdot d\vec{A} \\&= f(\vec{R})\hat{r} \cdot \left(\frac{\hat{n} R^2 d\Omega}{\hat{n} \cdot \hat{n}} \right) \\&= f(\vec{R}) R^2 d\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\Phi' &= f(\vec{R})\hat{r} \cdot d\vec{A}' \\&= f(\vec{R})\hat{r} \cdot \left(\frac{\hat{n}' R^2 d\Omega}{-\hat{n} \cdot \hat{n}'} \right) \\&= -f(\vec{R}) R^2 d\Omega\end{aligned}$$

e portanto o fluxo de um campo radial através de cada elemento de área, de uma superfície S qualquer, na vizinhança de um ponto $\vec{R}$ será igual, em módulo, ao elemento de fluxo $f(\vec{R})R^2 d\Omega$ através de uma esfera de raio R na vizinhança deste mesmo ponto. O sinal relativo entre esses fluxos é positivo ($d\Phi$) se o interior da superfície S está na região $r < R$ da vizinhança de $\vec{R}$, e negativo ($d\Phi'$) se o interior de S na vizinhança de $\vec{R}$ está na região $r > R$.