

Fluxo e lei de Gauss

As linhas de campo auxiliam a visualização (v. Figs. 6 e 7) de uma propriedade decorrente do caráter vetorial do campo elétrico: de que pode-se falar do fluxo do campo através de uma superfície.

Consideremos um elemento de superfície arbitrário no espaço, na vizinhança de um ponto, também arbitrário, em que há um campo elétrico $\vec{E}$ fazendo um ângulo — igualmente arbitrário — com a superfície, que por sua vez pode ser considerada plana pois infinitesimal. Sendo assim, esse elemento de área pode ser descrito vetorialmente por um vetor normal a ele e de módulo igual à área da, conforme ilustrado na Fig. 9: $d\vec{a}$.

O fluxo do campo elétrico através desse elemento de superfície corresponde a uma medida do quanto ele o atravessa. Dada sua direção, o campo pode ser decomposto em duas componentes: uma perpendicular e uma paralela ao elemento de superfície — $\vec{E}_\perp$ e $\vec{E}_\parallel$, respectivamente (v. Fig. 9).

Com essa decomposição, separamos a parte do campo que não atravessa a superfície, por estar ao longo da mesma: $\vec{E}_\parallel$. Excluindo-se $\vec{E}_\parallel$ de $\vec{E}$, temos $\vec{E}_\perp$, que é a parte do campo que atravessa a superfície.

Para "selecionar" $\vec{E}_\perp$ e "excluir" $\vec{E}_\parallel$, basta fazer o produto escalar com um vetor perpendicular à superfície, servindo a isso portanto o vetor

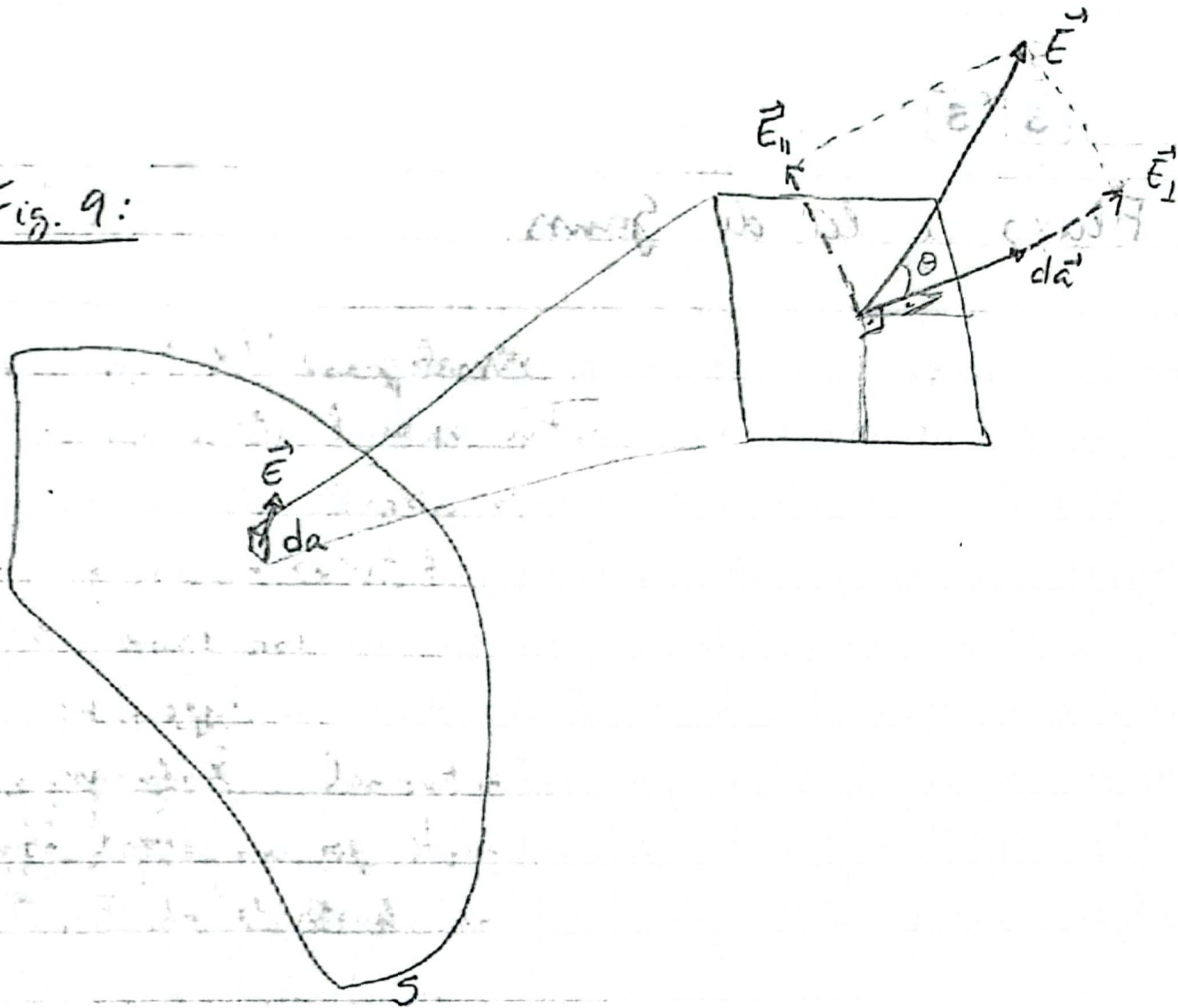
$$\hat{n} := \frac{d\vec{a}}{da},$$

e então

$$\vec{E}_\perp = \vec{E} \cdot \hat{n}.$$

Porém, o fluxo do campo através de um elemento de superfície será também proporcional à área do mesmo, de modo que

Fig. 9:



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

define o quanto de campo atravessa este elemento de área.

Logo, o fluxo do campo elétrico através de uma superfície S será dado por:

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a},$$

sendo medido, no SI, em $(N/C) \cdot m^2$.

Para superfícies abertas, há uma ambiguidade na definição do sentido de $d\vec{a}$, que torna o sinal do fluxo ambíguo. Por razões que ficarão evidentes em breve, estaremos interessados em superfícies fechadas, de modo que podemos convençionalmente, sem ambiguidades, $d\vec{a}$ sempre orientada externamente à (ou seja, para fora da) superfície, estando assim o fluxo Φ_S univocamente definido $\forall$ superfície fechada S .

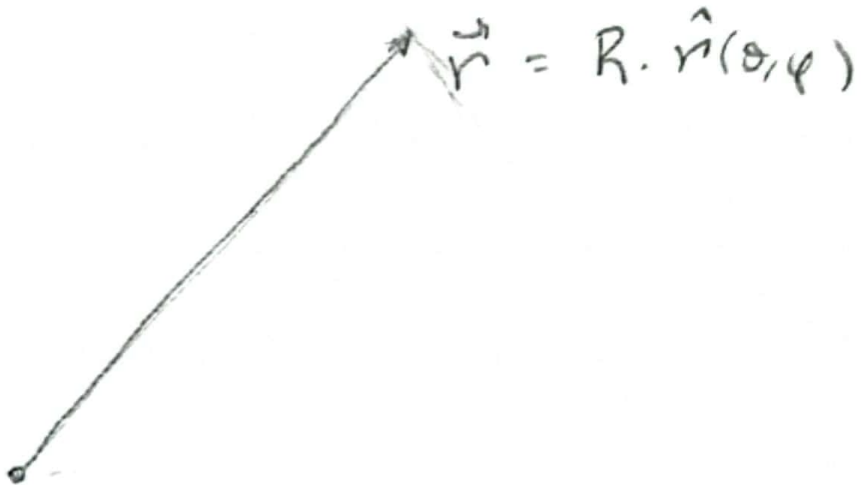
Consideremos então o campo gerado por uma carga pontiforme; a simetria esférica nos sugere iniciar com o cálculo do fluxo através de uma esfera com raio R e centro na localização da carga (v. Fig. 10):

$$\Phi_{\text{esfera}} = \int_{\text{esfera}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} \quad , \quad \text{com } d\vec{a}(\vec{r}) = r^2 d\Omega \hat{r} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \Phi_{\text{esfera}} &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{R^2} \right) \cdot (R^2 \sin\theta \hat{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{[-\cos\theta]_0^\pi}_{-(-1-1)} \underbrace{[\varphi]_0^{2\pi}}_{(2\pi-0)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\text{esfera}} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Fig. 10:



Podríamos considerar diversas outras geometrias particulares, contudo é interessante explorarmos antes algumas generalidades. Primeiramente, nota-se que o fluxo calculado independe do raio da esfera.

$$\therefore \Phi_{\text{esfera}} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \forall \text{ esfera centrada na carga,} \quad [13]$$

o que decorre diretamente do comportamento $\sim 1/r^2$ do campo elétrico.

Agora, em decorrência de o campo de uma carga pontiforme ser radial, segue mais uma propriedade*, relacionando o fluxo através de um elemento de área, de uma superfície S qualquer, na vizinhança de um ponto $\vec{R}$ ao elemento de fluxo $\vec{E}(\vec{R}) R^2 d\Omega$ através de uma esfera de raio R , centrada na localização da carga, na vizinhança deste mesmo ponto (v. Fig. 11):

$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{E}(\vec{R}) \cdot d\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{R^2} R^2 d\Omega \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \cdot (\pm 1), \end{aligned} \quad [14-a]$$

onde o fator ± 1 depende da orientação do elemento de área $d\vec{A}$ de S em $\vec{R}$:

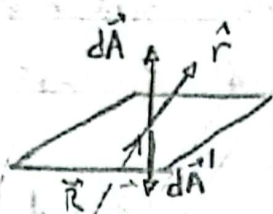
$$\begin{aligned} &\text{Se, na vizinhança de } \vec{R}, \\ &\text{o interior de } S \text{ está na região } \begin{cases} r < R : \text{ fator } +1 \\ r > R : \text{ fator } -1 \end{cases} \end{aligned} \quad [14-b]$$

Este fator é o sinal relativo entre o elemento de fluxo do campo, em $\vec{R}$, através de uma superfície qualquer e o elemento de fluxo, em $\vec{R}$, através de uma esfera de raio R e centrada na carga.

Como o fluxo [13] independe do raio da esfera, concluímos então que, integrando sobre toda a superfície S que contenha qualquer esfera centrada na carga — portanto para toda superfície fechada

(*) V. apêndice "Fundamental matemático".

Fig. 11:



$$dA = \frac{R^2 d\Omega}{\hat{r} \cdot \hat{n}}$$

$$d\vec{A} = r^2 d\Omega \hat{n}$$

$d\vec{A} = dA \hat{n}$: elemento de uma superfície S fechada, com seu interior na região $r < R$ da vizinhança de $\vec{R}$.

$d\vec{A}' = dA \hat{n}'$: elemento de uma superfície S fechada, com seu interior na região $r > R$ da vizinhança de $\vec{R}$.
 $(\hat{n}' = -\hat{n})$

contendo a carga puntiforme em seu interior, o resultado será o mesmo que o fluxo através de qualquer esfera:

$$\Phi_S = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \forall S \text{ fechada com } q \text{ em seu interior.} \quad [15]$$

Ainda, devido a [14-a] e [14-b], para qualquer superfície fechada que não contenha a carga q em seu interior, para cada elemento de ângulo sólido $d\Omega$ haverá sempre um número par de elementos de área, e para cada elemento de área, compreendido por $d\Omega$, que contribuir com fator $+1$ em [14-a], haverá outro elemento que contribuir com fator -1 , e vice-versa (v. Fig. 12). Logo, integrando sobre toda a superfície, o fluxo se anula.

Portanto, para uma carga puntiforme, temos:

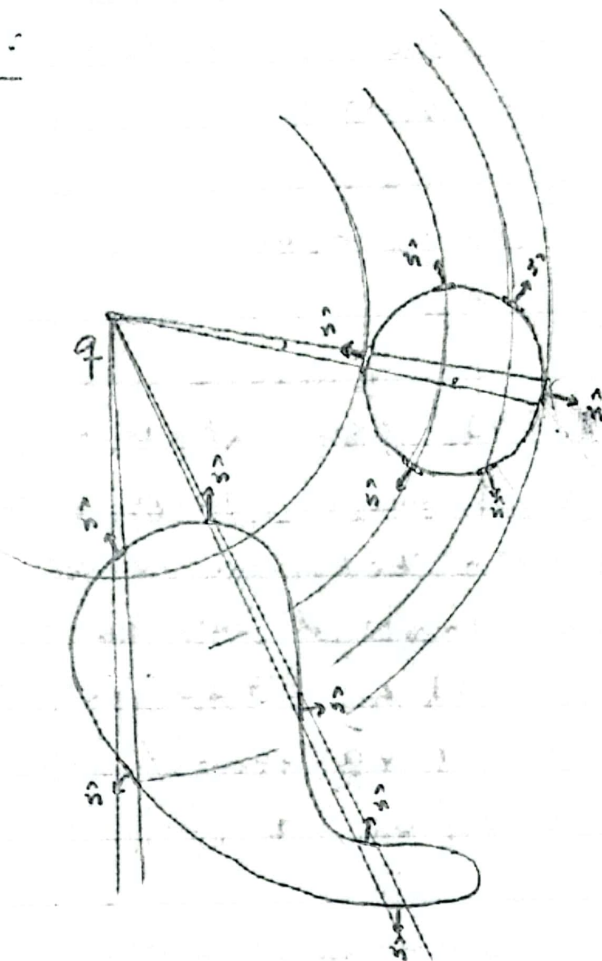
$$\Phi_S = \begin{cases} q/\epsilon_0, & \text{se } S \text{ contém } q \\ 0, & \text{se } q \text{ fora de } S \end{cases} \quad [16]$$

Pelo princípio de superposição, o campo elétrico devido a uma distribuição de cargas puntiformes é dado por [9], sendo seu fluxo através de uma superfície fechada S então:

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \left(\sum_{i=1}^N \frac{q_i \hat{r}_i}{r_i^2} \right) \cdot d\vec{a}^* \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \int_S \frac{\hat{r}_i \cdot d\vec{a}}{r_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_S \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_i \cdot d\vec{a}}{r_i^2}, \end{aligned}$$

onde cada integral, $\forall i=1, \dots, N$, é dada por [16].

Fig. 12:



(*) Lembrando que $\vec{r}_i$ é a posição do ponto $\vec{r}$, em que o campo é avaliado, em relação à carga q_i .

Logo, temos que o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada S será

$$\Phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad [17] \quad \underline{\underline{[lei de Gauss]}}$$

onde Q é a soma de todas as cargas internas a S .

Este resultado, conhecido como a lei de Gauss, é consequência da dependência $\sim 1/r^2$ do campo elétrico, de sua direção radial e do princípio de superposição.

Como o campo de uma distribuição infinitesimal (i.e. um elemento) de carga também é radial:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2},$$

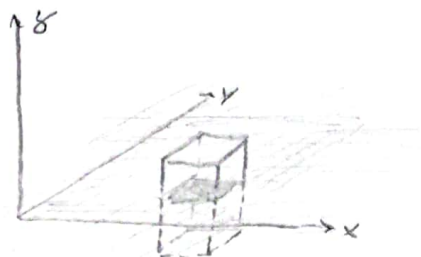
segue então que a lei de Gauss vale também para distribuições contínuas de carga, sendo a carga em [17] dada então por

$$Q = \int_V \rho dV = \int_A \sigma da = \int_L \lambda dl,$$

onde V , A ou L são, respectivamente, o volume, a superfície ou a linha sobre a qual a carga está distribuída.

Aplicaremos então a lei de Gauss a algumas distribuições, destacando-nos a importância da escolha da superfície a partir da simetria apresentada pela configuração de cargas:

Exemplo: plano "infinito" uniformemente carregado.



$$\underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \vec{0}}_{\text{simetria da distribuiao de carga}} \quad \therefore \quad \vec{E}(\vec{r}) = E(z) \hat{k}$$

Da lista 2: $\vec{E} = \begin{cases} E \hat{k}, & \text{para } z > 0 \\ -E \hat{k}, & \text{para } z < 0. \end{cases}$

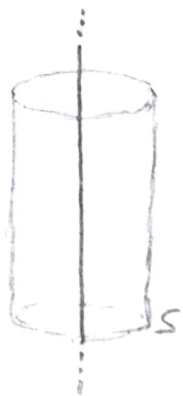
Superfície S : paralelepípedo

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \left(\int_{\text{laterais}} + \int_{\text{face } z+} + \int_{\text{face } z-} \right) \vec{E} \cdot d\vec{a} \\ &= 0 + \int_A E \hat{k} \cdot da \hat{k} + \int_A (-E \hat{k}) \cdot da (-\hat{k}) \\ &= E \cdot A + E \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} \int_A \sigma da \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2E \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Exemplo: fio "infinito" uniformemente carregado



$$\text{Simetria axial: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial \phi} = \vec{0} \end{array} \right\} \therefore \vec{E}(\vec{r}) = E(\rho) \hat{\rho}$$

S : superfície cilíndrica centrada no fio

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \left(\int_{\text{face superior}} + \int_{\text{face inferior}} + \int_{\text{lateral}} \right) \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

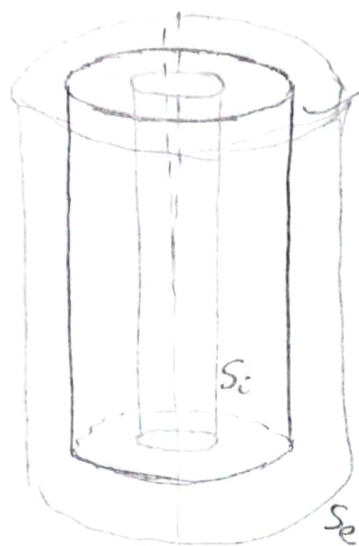
$$= \int_{\text{face superior}} E(\rho) \hat{\rho} \cdot \hat{k} da + \int_{\text{face inferior}} E(\rho) \hat{\rho} \cdot (-\hat{k}) da + \int_{\text{lateral}} E(\rho) \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} da$$

$$= 0 + 0 + \int_0^L \int_0^{2\pi} E(\rho) \rho d\theta dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^L \lambda dl$$

$$\Rightarrow E(\rho) \cdot \rho \cdot (2\pi - 0) \cdot (L - 0) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho}}$$

Exemplo: casca cilíndrica "infinita" uniformemente carregada



Distribuição de carga: $\vec{r}' = \begin{cases} \rho' = R \\ z' \in (-\infty, \infty) \\ \theta' \in (0, 2\pi) \end{cases}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{(\rho\hat{\rho} + z\hat{k} - R\hat{\rho}' - z'\hat{k})}{|\rho\hat{\rho} + z\hat{k} - R\hat{\rho}' - z'\hat{k}|^3}$$

complicado!

Simetria axial: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta} = \vec{0} \end{array} \right\} \therefore \vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\hat{\rho}$

S_i : casca cilíndrica interna à distribuição de carga

S_e : casca cilíndrica externa à distribuição de carga

$$\Phi_{S_e} = \oint_{S_e} \vec{E}(\rho) \hat{\rho} \cdot d\vec{a}$$

$$= \int_0^L \int_0^{2\pi} E(\rho) \rho d\theta dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \sigma R d\theta dz$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot L \cdot E(\rho) \cdot \rho = \frac{2\pi \cdot L \cdot \sigma R}{\epsilon_0}$$

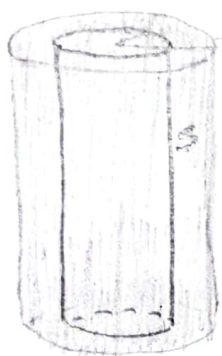
$$\Rightarrow \boxed{E(\rho) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \cdot \rho} = \frac{\overbrace{(\sigma \cdot 2\pi R)}^{\lambda}}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \text{ para } \rho > R.}$$

$$\Phi_{S_i} = \oint_{S_i} E(\rho) \hat{\rho} \cdot d\vec{a} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E(\rho) \rho d\theta dz = 0, \text{ pois não há carga interna a } S_i.$$

$$\Rightarrow E(\rho) \cdot \rho \cdot 2\pi L = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E(\rho) = 0 \text{ para } \rho < R.}$$

Exemplo: cilindro maciço "infinito" uniformemente carregado.



→ Distribuição de carga: $dq' = \rho d\tau' = \rho dz' dr' d\theta'$

→ Simetria axial permanece:

$$\begin{cases} r' \in (0, R) \\ z' \in (-\infty, \infty) \\ \theta \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\Phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

$$\Rightarrow 0 + \int_0^{2\pi} \int_0^L E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} dz r d\theta = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho dz d\theta r' dr'$$

$$\Rightarrow 2\pi L \cdot E(r) \cdot r = \frac{2\pi L \rho}{\epsilon_0} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_0^r$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot r = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot r \text{ para } r < R}$$

De posse da lei de Gauss [17], podemos aplicar o teorema da divergência (ou teorema de Gauss)*:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv \quad [18]$$

$\downarrow$ superfície fechada $\downarrow$ elemento de área $\downarrow$ elemento de volume
 $\downarrow$ volume compreendido pela superfície S
 Fluxo do campo elétrico através de S: Φ_S .

onde o operador $\vec{\nabla}$ é dado, em geral, por:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3},$$

sendo, para cada sistema de coordenadas:

	(q_1, q_2, q_3)	$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$	(h_1, h_2, h_3)
Cartesianas	(x, y, z)	$(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$	$(1, 1, 1)$
Cilíndricas	(ρ, φ, z)	$(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{k})$	$(1, \rho, 1)$
Esféricas	(r, θ, φ)	$(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$	$(1, r, r \sin \theta)$

Do teorema [18], inferimos então que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ é o fluxo do campo por unidade de volume na vizinhança do ponto $\vec{r}$.

Unindo à [17], temos

$\Phi_S = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$, uma vez que Q é toda a carga contida pela superfície S , e portanto no volume V .

$$\therefore \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv = 0,$$

(*) V. apêndice "Fundamental matemático", e
para detalhes indica-se a lista de
Purcell, E.M., Eletricidade e Magnetismo (Curso de Física de Berkeley).

o que vale para qualquer volume V , arbitrário, de modo então que o integrando deve ser identicamente nulo, e portanto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad [19]$$

que é a forma diferencial (em contraste à integral [18]), ou local (em contraste à global [18]) da lei de Gauss, sendo contida também por equações de Poisson.

Lembrando que o divergente do campo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$, é o fluxo (total) por unidade de volume na vizinhança de cada ponto $\vec{r}$, seu valor re-trata então o "saldo" de entrada ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} < 0$) ou saída ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} > 0$) das linhas de campo na vizinhança de cada ponto, e a [19] estabelece a densidade de carga $\rho(\vec{r})$ como uma fonte ($\rho > 0$) ou sumidouro ($\rho < 0$) de linhas de campo na vizinhança de $\vec{r}$. *

Vamos agora explorar algumas características gerais do campo elétrico, decorrentes da lei de Coulomb, do princípio de superposição e da lei de Gauss, aliadas a princípios e conceitos da mecânica.

Consideremos uma superfície condutora em equilíbrio eletrostático: por ser condutora, as cargas poderiam se mover livremente pelo corpo, contudo não o fazem dada a condição de equilíbrio. Caso houvesse campo elétrico no interior do condutor, tais cargas seriam aceleradas, configurando uma situação de não-equilíbrio.

Logo: no equilíbrio eletrostático, o campo elétrico é nulo no interior de um condutor ($\vec{E} = \vec{0}$) e, consequentemente (por [19]), a densidade de carga é nula em seu interior.

Resta então que, no equilíbrio eletrostático, a carga de um condutor esteja distribuída em sua superfície, havendo portanto uma densidade superficial $\sigma \neq 0$ para todo condutor em equilíbrio eletrostático.

(*) Para uma rica visualização e melhor entendimento, recomenda-se
o vídeo:

"Divergência e rotacional: a linguagem das equações
de Maxwell, fluxos de fluidos e muito mais", 3Blue1Brown.

Para que esta distribuição superficial seja de fato estática, é necessário que o campo elétrico, nesta superfície fronteira entre o meio condutor e um meio isolante, não tenha componente tangencial à superfície, uma vez que tal componente retiraria as cargas do equilíbrio.

Logo: na superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático o campo elétrico - e portanto as linhas de campo - são ortogonais / normal à superfície em cada ponto.

Consequentemente, na superfície:

$$\vec{E} = E \hat{n} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial n} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_0^E dE = \int_{\epsilon_0}^{\delta} \frac{\rho}{\epsilon_0} dn,$$

onde δ é a espessura da camada de transição* que configura a superfície externa do condutor.

$$\therefore E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \delta, \text{ com } \rho \text{ (C/m}^3\text{)} \cdot \delta \text{ (m)}$$

sendo justamente a densidade de carga por unidade de área da superfície, e portanto:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [20]$$

relaciona a intensidade do campo e a densidade de carga na superfície de um condutor em equilíbrio eletrostático.

O transiente até se atingir a situação de equilíbrio é uma questão que transcende da eletrostática à eletrodinâmica, contudo já foi "presenciada" com o eletroscópio.

As próximas propriedades da interação eletrostática envolvem os conceitos de trabalho e energia.

(*) Em geral da ordem de algumas camadas atômicas.