
Ferramental matemático. Carga elétrica e lei de Coulomb.

1. Desenvolvendo familiaridade com coordenadas polares (r, θ) :
 - a. A partir da visualização de um ponto no plano, escreva as coordenadas polares em termos das cartesianas, e vice-versa.
 - b. Desenhe os versores polares junto aos cartesianos e escreva $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ em função de $\hat{i}$, $\hat{j}$ e θ .
 - c. Inverta a relação obtida no item **b** e, utilizando também o obtido no item **a**, escreva o vetor posição $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ em termos das coordenadas e versores polares.
 - d. Calcule $\frac{d\hat{r}}{d\theta}$ e $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}$.
 - e. Determine o diferencial $d\vec{r}$ (elemento de deslocamento) em coordenadas polares.
-

2. Desenvolvendo familiaridade com coordenadas esféricas (r, θ, φ) , dadas por:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos(z/r)$$

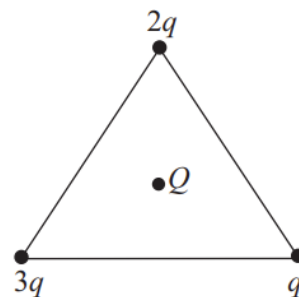
$$\varphi = \arctan(y/x) .$$

- a. A partir da visualização de um ponto no espaço em coordenadas esféricas, das relações acima e da expressão do vetor posição em coordenadas e versores esféricos: $\vec{r} = r\hat{r}$, determine o versor radial $\hat{r}$ em função dos versores cartesianos $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.
 - b. A partir da definição dos versores $\hat{\theta} := \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{d\theta}$ e $\hat{\varphi} := \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d\vec{r}}{d\varphi}$, escreva $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ em termos dos versores cartesianos.
 - c. Determine o diferencial $d\vec{r}$ (elemento de deslocamento) em coordenadas esféricas.
-

3. Considere as interações gravitacional e eletrostática entre dois elétrons, F_g e F_e respectivamente, separados por uma distância r . Consultando os valores das constantes físicas [neste endereço](#), determine:
 - a. A ordem de grandeza da razão entre as forças gravitacional e eletrostática entre dois elétrons.
 - b. Hipoteticamente, qual deveria ser a ordem de grandeza da massa do elétron para que estas forças pudessem se equilibrar?
-

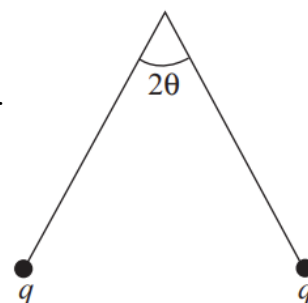
4. Cargas $q_1 = q$, $q_2 = 2q$ e $q_3 = 3q$ situam-se nos vértices de um triângulo equilátero de lado l . Uma carga Q é colocada no centro do triângulo. Escolhendo os eixos x e y horizontal para a direita e vertical para cima, respectivamente, calcule a força (i.e. o vetor!) eletrostática resultante sobre a carga Q :

- Colocando a origem dos eixos sobre a carga $3q$ e escrevendo o vetor posição de cada carga ($\vec{r}_Q$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$) em coordenadas cartesianas.
- Colocando a origem dos eixos sobre a carga Q e escrevendo o versor da posição de Q relativa a cada uma das outras cargas ($\hat{r}_{Q1}$, $\hat{r}_{Q2}$ e $\hat{r}_{Q3}$) também em coordenadas cartesianas.



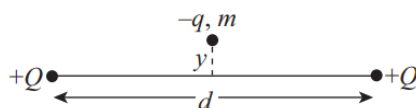
5. Dois pequenos objetos idênticos de massa m e carga elétrica q encontram-se suspensos por fios isolantes de comprimento l . Dado que os corpos atingem o equilíbrio num ângulo de abertura 2θ :

- Demonstre que $q^2 = 16\pi\epsilon_0 mgl^2 \tan\theta \sin^2\theta$ e que, assim, este mecanismo pode servir de medida da carga elétrica q desses objetos.
- Se $m = 1$ g, $l = 20$ cm e $\theta = 30^\circ$, qual é o valor de q ?
- Suponha que você não tenha conhecimento de que as cargas elétricas dos objetos sejam iguais: seria possível medir o valor da carga elétrica de cada um deles com este experimento?



E se você tivesse mais exemplares destes objetos, de mesma massa mas carga elétrica desconhecida: haveria então alguma forma de determinar suas cargas elétricas?

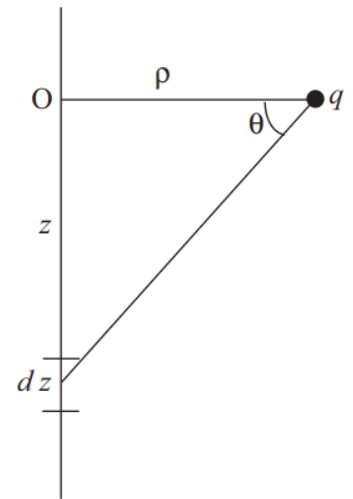
6. Uma partícula de massa m e carga negativa $-q$ está situada no ponto médio do segmento de reta que une duas cargas positivas idênticas, podendo a princípio se mover nesta direção, ou na direção perpendicular y , mostrada na figura.



- Mostre que a posição de equilíbrio em $y = 0$ é instável para pequenos deslocamentos ($x \ll d$) da carga $-q$ ao longo da linha que une as duas outras cargas.
- Mostre que essa mesma posição de equilíbrio é estável para pequenos deslocamentos ($y \ll d$) da carga $-q$ na direção y e determine sua frequência angular de oscilação em torno da posição de equilíbrio.

7. Um fio infinito muito longo (trate-o como infinito) está eletrizado com uma densidade linear de carga λ . Calcule a força elétrica com que ele atua sobre uma carga puntiforme q colocada a uma distância ρ , como mostra a figura ao lado.

- a. Exprimindo a contribuição de um elemento dz do fio à distância z da origem em função do ângulo θ e empregando argumentos de simetria.
- b. Aplicando diretamente coordenadas cilíndricas e calculando o vetor força elétrica sem empregar argumentos de simetria.



□

Gabarito:

1. a. $r = +\sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$; $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.
b. $\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix}$.
c. $\vec{r} = r \hat{r}$.
d. $\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$, $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$.
e. $d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$
2. a. $\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$
b. $\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$
 $\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$
c. $d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi}$
3. a. $\frac{F_g}{F_e} \sim 10^{-43}$
b. $m_e \sim 1\mu g$ (i.e. 10^{-9} kg)
4. a. b. $\vec{F} = \frac{3\sqrt{3} Q q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \hat{i}$
5. a. Aplique a segunda lei de Newton a um dos objetos.
b. $1,6 \cdot 10^{-6}$ C.
c. Sim, repetindo o experimento com ao menos três pares, obtendo-se assim os valores dos três produtos $q_1 q_2$, $q_2 q_3$ e $q_1 q_3$, e a expressão obtida no item **a** permanecerá válida uma vez que o ângulo ainda será simétrico devido à terceira lei de Newton.
6. a. Deve-se mostrar que a força elétrica resultante, e portanto a aceleração da carga, será no mesmo sentido de seu deslocamento em relação à posição de equilíbrio.
b. $\omega = 2\sqrt{\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 m d^3}}$.
Dica: Aplicando a segunda lei de Newton, mostre que o deslocamento em y satisfará a equação $\frac{d^2 y}{dt^2} = -C y$ – que para pequenos valores de y é a equação do oscilador harmônico, que tem solução da forma, p.ex., $y = A \cos(\omega t + \phi)$.
7. a. $\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho}$, radial para fora
b. $\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho}$