

Fontes de campo magnético

- Lembrando do campo elétrico e do potencial elétrico:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{--- ou ---} \quad dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$\vec{r}'$ é distribuições de carga

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}'$ é distribuições de carga

Agora, as fontes são distribuições não de carga, mas de corrente!
escalar vetorial ($\vec{J}$)

- Há um potencial associado ao campo magnético, mas ele é vetorial:

POTENCIAL VETOR: $d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

μ_0 : permeabilidade magnética do vácuo

cuja relação com o campo magnético

é dada por:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times d\vec{A}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow^* d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1)$$

LEI DE

e portanto:

BIOT-SAVART

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1')$$

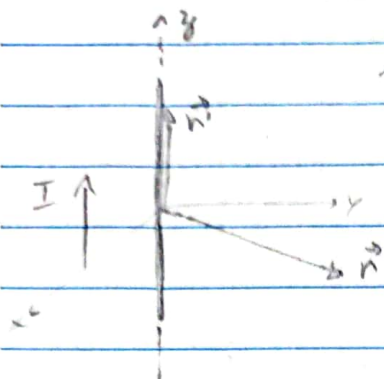
$\vec{r}'$ é distribuições de corrente

$$\begin{aligned}
 (*) \quad d\vec{B} &= \vec{\nabla} \times d\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times d\vec{\ell}(\vec{r}') ,
 \end{aligned}$$

needs $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} ,$

$$\Rightarrow d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{\ell}(\vec{r}')$$

• Exemplo: campos magnéticos de um fio "infinito".



→ simetria axial: coordenadas cilíndricas (s, θ, z)

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

↳ ponto a avaliar o campo: $\vec{r} = s\hat{s} + z\hat{k}$

↳ distribuições de corrente: $\vec{r}' = z'\hat{k} : z' \in (-\infty, \infty)$

$$d\vec{\ell}' = dz'\hat{k}$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (dz'\hat{k}) \times \frac{[s\hat{s} + (z - z')\hat{k}]}{[s^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' s (\hat{k} \times \hat{s})}{[s^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{s}{s^3} \hat{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{z - z'}{s} \right)^2 \right]^{-3/2} dz' ;$$

$$S = \frac{z - z'}{s} \Rightarrow dS = -\frac{dz'}{s}, \quad z' \rightarrow -\infty \Leftrightarrow S \rightarrow +\infty, \quad z' \rightarrow +\infty \Leftrightarrow S \rightarrow -\infty,$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{\theta}}{s^2} \int_{+\infty}^{-\infty} -s dS (1 + S^2)^{-3/2}, \quad S = \frac{1}{s} \delta \Rightarrow dS = -\frac{1}{s^2} d\delta$$

$S \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \delta \rightarrow \pi/2$
 $S \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \delta \rightarrow -\pi/2$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{\theta}}{s} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\delta}{\cos^3 \delta}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{\theta}}{s} \cdot \ln \delta \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\theta}}$$

→ sentidos da corrente e regra da mão direita!

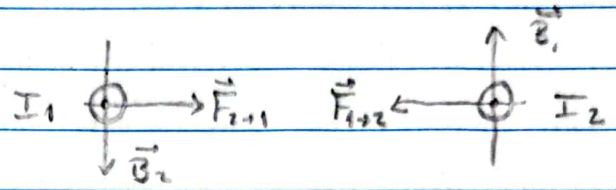
→ direção e sentidos tangencial

decrece com a distância s ao fio

↳ Imagens: campo magnético de $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ fio} \\ 1 \text{ par de fios} \end{array} \right\} \rightarrow v. \text{ slides}$
 ↓
 princípio de superposição!

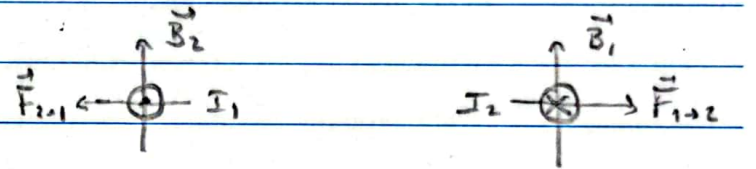
↳ Força magnética entre dois fios a uma distância d um do outro:

- CORRENTES NO
MESMO SENTIDO:



força atrativa

- CORRENTES EM
SENTIDOS OPostos:



força repulsiva

- Em ambas as casos, a intensidade da força entre os fios

é dada por:

$$F = \int_0^L I_1 dl_1 B_2(d) \cdot \sin 90^\circ = \int_0^L I_2 dl_2 B_1(d) \cdot \sin 90^\circ$$

$$= I_1 \cdot \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \cdot d} \int_0^L dl$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}, \text{ onde consideramos os fios de mesmo comprimento}$$

"infinito" ($L \gg d$).

Logo, a força por unidade de comprimento entre os fios será dada por:

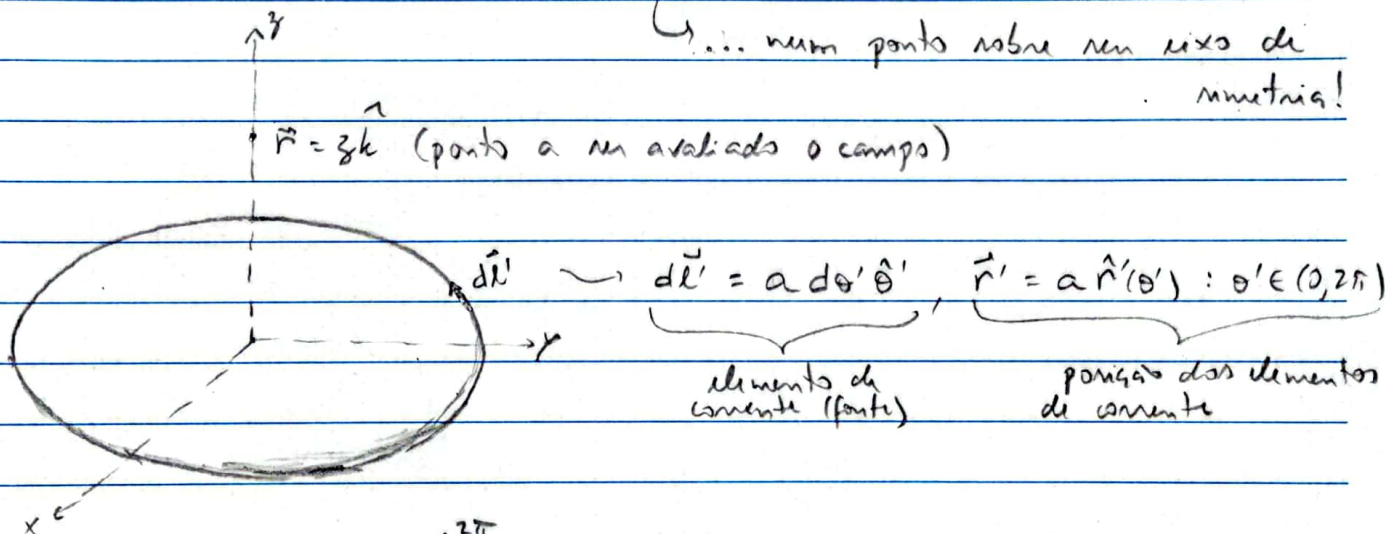
$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (2)$$

↳ Serve de definição de Ampère!

↳ unidade básica no SI

• Exemplo: campos magnéticos de uma espira circular...

↳ ... num ponto sobre seu eixo de simetria!



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a d\theta' \hat{\theta}') \times [z\hat{k} - a\hat{r}']}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta' (z \hat{\theta}' \times \hat{k} + a \hat{r}' \times \hat{\theta}')$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \left[z \int_0^{2\pi} d\theta' \hat{r}'(\theta') + a \int_0^{2\pi} d\theta' \hat{k} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \left[z \cdot 0 + a \cdot 2\pi \hat{k} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

↳ Pelo princípio da superposição, o campo sobre o eixo de N espiras
será:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (3)$$

1, em particular, sobre o eixo ($z=0$) será $\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 N I}{2a} \hat{k}.$

fora muito distante das espiras ($z \gg a$),

$$\vec{B}(z) \rightarrow \frac{\mu_0 N I a^2}{2z^3} \hat{k},$$

cujos comportamento $\sim 1/z^3$ remete ao do campo elétrico de um
dipolo:

$$\vec{E}(0, z) = \frac{+\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 z^3}.$$

Se observarmos a expressão (3), notamos que $N I \pi a^2 \hat{k} = \vec{\mu}$
é o momento magnético das N espiras, de modo que o campo por
elas gerado escreve-se como:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\vec{\mu}}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3')$$

Fora do eixo de simetria (que escolhemos como z), a expressão
envolve uma integração bastante mais elaborada*.

(*) Num ponto $\vec{r}$ qualquer,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a d\theta' \hat{\theta}') \times [(r\hat{r} + z\hat{k}) - (a\hat{r}')] }{[(r\hat{r} + z\hat{k} - a\hat{r}') \cdot (r\hat{r} + z\hat{k} - a\hat{r}')]^{3/2}} ,$$

cujos termos elevados a $3/2$ é

$$\begin{aligned} (r\hat{r} + z\hat{k} - a\hat{r}') \cdot (r\hat{r} + z\hat{k} - a\hat{r}') &= \\ &= r^2 + z^2 + a^2 - 2ar\hat{r} \cdot \hat{r}' \\ &= r^2 + z^2 + a^2 - 2ar(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \cdot (\cos\theta' \hat{i} + \sin\theta' \hat{j}) \\ &= r^2 + z^2 + a^2 - 2ar(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') \\ &= r^2 + z^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta' - \theta) \end{aligned}$$

e cujo numerador contém

$$\begin{aligned} \hat{\theta}' \times (r\hat{r} + z\hat{k} - a\hat{r}') &= \\ &= r(\hat{\theta}' \times \hat{r}) + z(\hat{\theta}' \times \hat{k}) - a(\hat{\theta}' \times \hat{r}') \\ &= r(-\sin\theta' \hat{i} + \cos\theta' \hat{j}) \times (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) + z\hat{r}' - a(-\hat{k}) \\ &= r(-\sin\theta' \sin\theta \hat{k} - \cos\theta' \cos\theta \hat{k}) + z\hat{r}' + a\hat{k} \\ &= [a - r\cos(\theta' - \theta)] \hat{k} + z(\cos\theta' \hat{i} + \sin\theta' \hat{j}) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{\hat{i} \left(\frac{z}{a} \cos\theta' \right) + \hat{j} \left(\frac{z}{a} \sin\theta' \right) + \hat{k} \left(1 - \frac{r}{a} \cos(\theta' - \theta) \right)}{[z^2 + r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta' - \theta)]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{\hat{i} (z\cos\theta') + \hat{j} (z\sin\theta') + r\hat{k} \left(\frac{a}{r} - \cos(\theta' - \theta) \right)}{[1 + (z/r)^2 + (a/r)^2 - 2 \frac{a}{r} \cos(\theta' - \theta)]^{3/2}} \end{aligned}$$

↳ pode ser expandido em torno de $\frac{a}{r} = 0$ para obter os termos dominantes longe (em comparação ao raio) da espina.

Propriedades gerais do campo magnético

Eletrostática:

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{d}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(dq' \frac{\hat{d}}{d^2} \right)$$

$\vec{r}'$ é distribuição de carga

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(\vec{r}) - V(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Magnetostática:

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}'}{d}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(I d\vec{l}' \times \frac{\hat{d}}{d^2} \right)$$

$\vec{r}'$ é distribuição de corrente

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{int}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Aplicações da lei de Ampère

D S T Q Q S S

"infinito"

17.7

- Campo magnético de um cilindro oco de corrente:



$$\begin{cases} \text{raio interno : } a \\ \text{raio externo : } b \end{cases}$$

Coordenadas cilíndricas : (s, ϕ, z) .

Em geral,

$$\vec{B}(s, \phi, z) = B_s \hat{s} + B_\phi \hat{\phi} + B_z \hat{k}$$

Simetria axial $\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial \phi} = \vec{0}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = \vec{0}$$

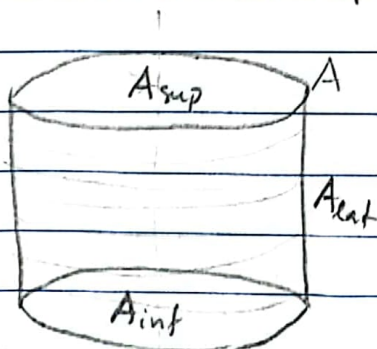
Logo, $\vec{B}(s) = B_s \hat{s} + B_\phi \hat{\phi} + B_z \hat{k}$.

Como a densidade de corrente $\vec{J} = J \hat{k}$, pela lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} J d\vec{l}' \times \frac{\hat{a}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} (J A dz) \times \frac{\hat{a}}{r^2} \perp \hat{k}$$

Logo $B_z = 0$.

Quanto à componente radial / polar, apliquemos a lei de Gauss para $\vec{B}$ com uma superfície cilíndrica arbitrária:



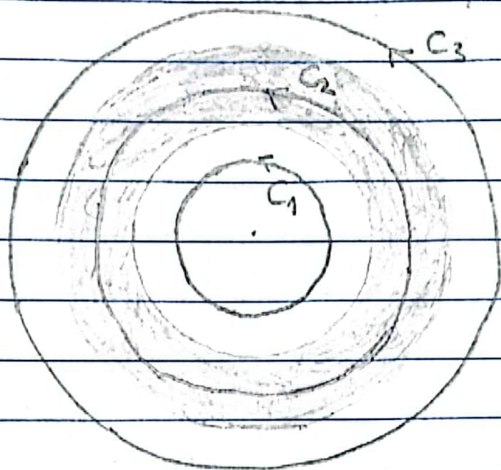
$$0 = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{A_{sup}} B_z da + \int_{A_{inf}} B_z da + \int_{A_{lat}} B_s da \\ &= 0 + 0 + B_s \cdot A_{lat} \end{aligned}$$

O que nos leva a $B_s = 0$, por conseguinte:

$$\vec{B}(s) = B(s) \hat{\theta}.$$

Para determinar $B(s)$, apliquemos a lei de Ampère a um caminho circular no plano xy para cada região de s :



* Para $s < a$:

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(s) \cdot 2\pi s = \mu_0 \cdot 0$$

$$\Rightarrow B(s) = 0 \quad \forall s < a.$$

* Para $s > b$:

$$\oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(s) \cdot 2\pi s = \mu_0 \cdot I,$$

onde $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = J \cdot \pi(b^2 - a^2)$, supondo uma densidade de corrente uniforme por toda a região do cilindro.

$$\Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad \forall s > b.$$

* Para $s \in (a, b)$:

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(s) \cdot 2\pi s = \mu_0 \cdot J \cdot \pi(s^2 - a^2),$$

$$= \mu_0 I \frac{(s^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

$$\Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \left(\frac{s^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) \quad \forall s \in (a, b)$$

*

(*) Para obter o campo de um cilindro maciço de corrente, basta tomar $a \rightarrow 0$ e $b \rightarrow R$, obtendo-se:

$$B(s) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi s} & \text{para } s > R \\ \frac{\mu_0 I s}{2\pi R^2} & \text{para } s < R. \end{cases}$$