

Força magnética e campo magnético

• Experimentos do século XIX : relação ímã $\leftrightarrow$ corrente elétrica.

• Força sobre uma carga q a velocidade $\vec{v}$ (relativa a um referencial inercial) :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}} \quad (1)$$

campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ independentes de $\vec{v}$.

campos elétricos, fonte: cargas elétricas

campo magnético; fonte: cargas em movimento

questão de referencial!

• Unidade de campos magnéticos no SI : $\frac{N/C}{m/s} = T = 10^4 G$

$\downarrow$ $\downarrow$
 Tesla (SI) Gauss (CGS)

• Trabalho realizado pela força de Lorentz :

$$\begin{aligned}
 dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = q(\vec{E} \cdot d\vec{r} + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}) \\
 &= q(\vec{E} \cdot \vec{v} dt + \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt}_{= 0})
 \end{aligned}$$

$\therefore$

Força magnética não realiza trabalho (afinal é perpendicular a $\vec{v}$ e a potência da força de Lorentz é: $\parallel$ e portanto à trajetória, causando somente aceleração radial!)

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}}$$

(2)

• Movimento de uma partícula carregada sob ação de um campo magnético:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{mag} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

3 equações diferenciais acopladas:

$$m \frac{dv_x}{dt} = q (v_y B_z - v_z B_y) \text{ etc,}$$

onde $\vec{v}(t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Se o campo magnético for uniforme ($\vec{B} = B \hat{k}$), podemos decompor a velocidade em componentes paralela e perpendicular a $\vec{B}$:

$$\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}, \text{ onde } \vec{v}_{||} = (\vec{v} \cdot \hat{B}) \hat{B} \text{ e } \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||}.$$

satisfazem:

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}_{||}}{dt} = q (\vec{v} \times \vec{B})_{||} = q [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \hat{B}] \hat{B} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_{||}}{dt} = 0, \\ m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q (\vec{v} \times \vec{B})_{\perp} = q (\vec{v} \times \vec{B}) = q (\vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B} = q \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}. \end{cases}$$

Logo a componente $\vec{v}_{||}$ paralela a $\vec{B}$ permanecerá constante e, para analisar a dinâmica de $\vec{v}_{\perp}$ consideremos o campo uniforme $\vec{B}$ ao longo do eixo z : $\vec{B} = B \hat{k}$. Assim, $\vec{v}_{\perp} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$ satisfazem as equações^{**}:

$$\begin{cases} m \dot{v}_x = q v_y B \\ m \dot{v}_y = -q v_x B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \\ \ddot{v}_y = -\omega^2 v_y \end{cases}, \text{ que têm soluções oscilatórias para } v_x \text{ e } v_y, \text{ o que por sua vez implica em soluções oscilatórias para } x(t) \text{ e } y(t) \text{ com a mesma frequência angular}$$

$$\omega = \frac{qB}{m}.$$

Caso $x(t)$ e $y(t)$ tenham mesma amplitude e diferença de fase de $\pi/2$ rad, temos uma solução do tipo

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t + \phi_0) \hat{i} + R \sin(\omega t + \phi_0) \hat{j} + (v_{||} t + z_0) \hat{k},$$

que corresponde a uma trajetória helicoidal com eixo de simetria na direção do campo magnético.

(*) Na verdade, essa decomposição pode ser feita instante a instante, mesmo com $\vec{B}$ variável. Lidamos aqui com $\vec{B}$ constante pela simplicidade apenas.

(**) Utiliza-se aqui a notação segundo a qual cada ponto sobre uma variável corresponde a uma derivada temporal:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad \text{e} \quad \ddot{v} = \frac{d^2v}{dt^2}.$$

- Força magnética sobre uma corrente:

Considerando como partícula um elemento infinitesimal de um fio conduzindo uma corrente

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a},$$

onde $\vec{J} = \sum_i q_i n_i \vec{v}_i$ é a densidade de corrente e S uma seção transversal do condutor, tem-se a força sobre um elemento de fio dada por:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dq \vec{v} \times \vec{B} = (\sum_i q_i n_i A d\ell) \vec{v}_i \times \vec{B} = I dt \vec{v} \times \vec{B} \\ &= (\vec{J} A d\ell) \times \vec{B}, \end{aligned}$$

Logo, tomando $\vec{J} A d\ell \equiv J A d\vec{\ell} = I d\vec{\ell}$, ou $\vec{v} dt \equiv d\vec{\ell}$, tem-se então:

$$\boxed{d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}}, \quad (3)$$

sendo a combinação $I d\vec{\ell}$ denominada elemento de corrente.

Para um fio condutor fechado, cujo formato seja descrito por uma curva C , tem-se

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (4)$$

Em particular, tem-se como consequência direta de (4) que a força magnética sobre um circuito fechado numa região de campos magnéticos uniformes é nula:

$$\vec{F} = I \left(\oint_C d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I \vec{0} \times \vec{B} = \vec{0}.$$

Contudo, um campo magnético uniforme pode exercer um torque sobre o circuito. Exploremos o caso de um circuito circular.

$$\begin{aligned}
 dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\
 &= q (\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{\perp \vec{v}}) \cdot \vec{v} dt \Rightarrow \frac{dW}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_R &= \vec{F}_{\text{mag}} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B} \\
 m \frac{dv_x}{dt} &= q (v_y B_z - v_z B_y) \text{ etc}
 \end{aligned}$$

$\vec{F}_{\text{mag}}$ num fio de corrente:

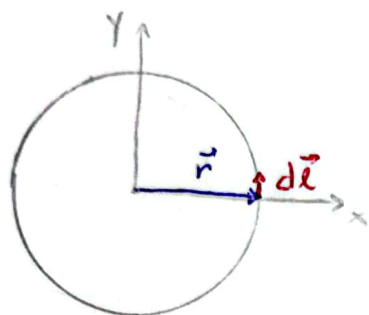
$$d\vec{F} = \underbrace{dq}_{\text{red}} \vec{v} \times \vec{B} = I \underbrace{dt \vec{v}}_{\text{red}} \times \vec{B} = I \underbrace{d\vec{l}}_{\text{red}} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_i q_i n_i A d\ell \right) \vec{v} \times \vec{B} = \left(\vec{J} A d\ell \right) \times \vec{B} \\
 &= \left(\vec{J} A d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}
 \end{aligned}$$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Circuito fechado num campo $\vec{B}$ uniforme:

$$\vec{F} = I \oint_C (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = I \left(\oint_C d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I \vec{0} \times \vec{B} = \vec{0}.$$



$$\vec{r} = R \hat{r}, \quad \hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$d\vec{\ell} = d\ell \hat{\theta} = R d\theta \hat{\theta}, \quad \hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

$$d\vec{G} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times (I d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

$$= I \vec{r} \times (d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

$$= I [(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell} - (\vec{r} \cdot d\vec{\ell}) \vec{B}]$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} \\ &\quad - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \end{aligned}$$

** o espira circular, torque em torno do centro*

$$\text{Se } \vec{B} = B_x \hat{i} + B_z \hat{k}, \quad \vec{r} \cdot \vec{B} = R \cos\theta B_x,$$

$$\Rightarrow \vec{G} = I \oint_C (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{\ell} = I \int_0^{2\pi} R \cos\theta B_x R d\theta \hat{\theta}$$

$$= I B_x R^2 \left(-\hat{i} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta}_0 + \hat{j} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta}_{\pi} \right)$$

o (integrandos ímpares)

$$= \hat{j} (I B_x \pi R^2)$$

$$\hookrightarrow \text{Área } A = \pi R^2. \text{ Vetorialmente: } \vec{A} = \pi R^2 \hat{k}.$$

$$\therefore \boxed{\vec{G} = I \vec{A} \times \vec{B}}$$

(*) Demonstração: utilizando o chamado tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} :

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_i = \epsilon_{ijk} A_j (\vec{B} \times \vec{C})_k$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m$$

$$= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m$$

$$= A_m B_i C_m - A_j B_j C_i$$

$$= (A_m C_m) B_i - (A_j B_j) C_i$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C}) B_i - (\vec{A} \cdot \vec{B}) C_i$$

$$\Rightarrow \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad \square$$

uma boa introdução
você podem encontrar
em:

[youtube.com/watch?v=0DTm2GeLIxY](https://www.youtube.com/watch?v=0DTm2GeLIxY)

[youtube.com/watch?v=mpcPKrxUPF4](https://www.youtube.com/watch?v=mpcPKrxUPF4)

Momento (de dipolo) magnético:

• P/ uma espira: $\boxed{\vec{\mu} = I \vec{A}}$

$\therefore \underline{\underline{\vec{\tau}_{\text{mag}} = \vec{\mu} \times \vec{B}}}$

obs: dipolo elétrico:
 $\vec{C} = \vec{p} \times \vec{E}$
 $U = \vec{p} \cdot \vec{E}$

Conexão com momento angular:

$$d\vec{L} = \vec{r} \times dm \vec{v} = \vec{r} \times (\rho dV) \vec{v}$$

$$= \vec{r} \times \left(\sum_i n_i m_i A d\ell \right) \vec{v}$$

$$\stackrel{i=1}{=} \vec{r} \times \left(\frac{m}{q} \vec{J} A d\ell \right)$$

$$= \frac{m}{q} \vec{r} \times (I d\vec{\ell})$$

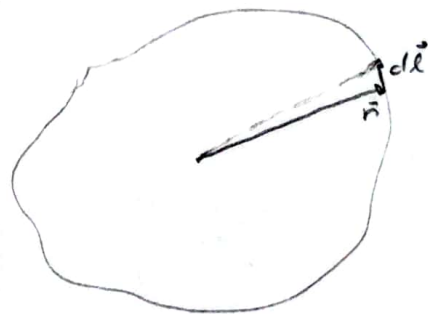
$$\therefore \vec{L} = \oint_c \frac{mI}{q} \vec{r} \times d\vec{\ell} = \frac{mI}{q} \oint_c \vec{r} \times d\vec{\ell}$$

$$= \frac{mI}{q} \oint_c 2 \cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{2m}{q} I \vec{A} = \frac{2m}{q} \vec{\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}}$$

$\hookrightarrow$ momento angular orbital + intrínseco
 spin do elétron!



Efeito Hall:

L.P. 7

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sum_i q_i n_i \vec{v}_i$$

Aplicar $\vec{B} \perp \vec{J}$ ($\vec{B} \perp \vec{E}$) $\Rightarrow \vec{F}_{mag} \Rightarrow$ redistribuição de cargas

sentido independente
do sinal dos portadores
de carga!

No estado
estacionário:

$\vec{E}_t$ transversal

fem Hall!

$$\vec{E}_t + \vec{v}_d \times \vec{B} = 0$$

→ p/ um único tipo de portadores de carga:

$$\Rightarrow \vec{E}_t = \frac{\vec{B} \times \vec{J}}{nq}$$

sentido depende do sinal
dos portadores
de carga!
e portanto
também o
sinal de ddp!