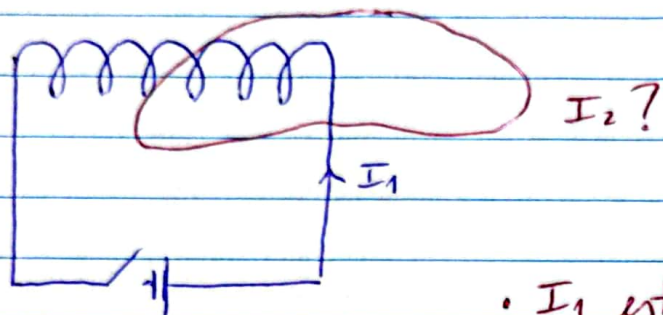


Indução eletromagnética

- Experimentos de Faraday: $\vec{B}$ pode gerar I ?



- I_1 estacionária: $I_2 = 0$
- Ao abrir e fechar a chave: $I_2 \neq 0$!!

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0} \Rightarrow I !$$

indução
eletromagnética

corrente induzida

fem induzida !!

Análise dimensional:

$$N = C \cdot \frac{V}{m} = C \cdot \frac{m}{s} \cdot T$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{ind} = R \cdot I_{ind}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{V}_{\mathcal{E}_{ind}} = \underbrace{\frac{T \cdot m^2}{s}}_{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

~> isso sugere haver uma relação do fenômeno com alguma área...

De fato, uma síntese das observações experimentais é que:

- I_{ind} gera $\vec{B}$ contrário a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: Lei de Lenz.
- $\mathcal{E}_{ind}$ é proporcional tanto a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ como à área do circuito!

Fluxo magnético:

$$\Phi_B = \int_{S_{aberta}} \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad [Wb] = [T][m]^2 \quad (\text{Weber})$$

↳ Lei da indução de Faraday:

$$\mathcal{E}_{ind} = \underbrace{-}_{\text{Lei de Lenz}} \frac{d\Phi_B}{dt} = \underbrace{-}_{\text{Lei de Lenz}} \frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (1)$$

superfície S
compreendida pelo
circuito C .

Fluxo independe da
escolha de superfície
pois $\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$.

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_a - V_b \neq 0 \quad !!!$$

$\vec{E}$ não é mais conservativo!!! Não há mais um potencial bem-definido!

(*) V. notas do Walter Lewis no modo.

• Explorando exemplos e aplicações:

Uma fem induzida pode ser originada por ...

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$\vec{B}$ (aprox.)
uniforme
sobre S .

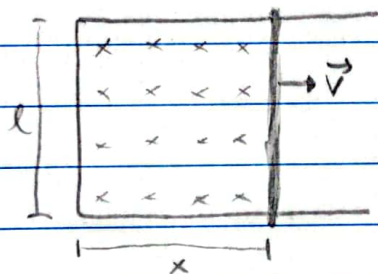
$$= \frac{d}{dt} (B \cdot A \cdot \cos\theta)$$

... variações temporais da intensidade B do campo, da área do circuito ou do ângulo θ entre o campo e esta área!

(1) Variando a área:

TRILHO CONDUCTOR COM HASTE (CONDUCTORA) MÓVEL

$\vec{B}$ uniforme $\parallel \hat{A}$: $\cos\theta = +1$ com $\hat{A} \odot$



$$\therefore \frac{d\Phi_B}{dt} = -B \frac{d(lx)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt}$$

$$= -Blv = -\mathcal{E}_{\text{ind}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}} = Blv = R \cdot I_{\text{ind}}$$

$\hookrightarrow > 0$: no sentido de $\hat{A}$
(4 regra da mão direita)

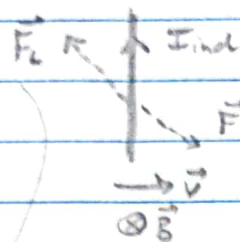
OBS: trocando o sentido

convencionado p/ $\hat{A} : \odot$

tem-se $\cos\theta = +1$ e $\frac{d\Phi_B}{dt} = +Blv \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}} = -Blv = R I_{\text{ind}}$

$\hookrightarrow < 0$: no sentido oposto
ao convencionado p/ $\hat{A}$ (regra da mão direita)

- Potência dissipada por esta corrente induzida: $P_{\text{ind}} = \mathcal{E}_{\text{ind}} I_{\text{ind}}$
 $= R I_{\text{ind}}^2 = \mathcal{E}_{\text{ind}}^2 / R$
- O que fazer para ter $\vec{v}$ constante?



$\vec{F}$: algum mecanismo sobre a barra, que realiza trabalhos (positivos!) a uma taxa $P_F = \vec{F} \cdot \vec{v}$

> Força de Lorentz: $\vec{F}_L = -\vec{F}$

$$\Rightarrow P_F = F_{||} \cdot v$$

$$= F_{L||} \cdot v$$

$$= I_{\text{ind}} l B \cdot v$$

$$= I_{\text{ind}} \cdot \mathcal{E}_{\text{ind}}$$

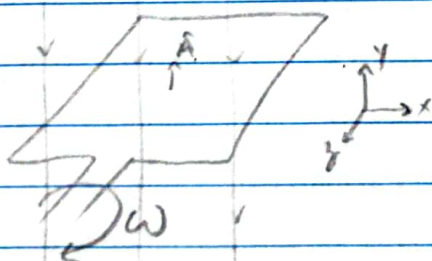
Logo a potência fornecida pelo trabalho mecânico que move a haste é internamente dissipada pela corrente induzida no circuito.

(2) Variando o campo:

- exemplo slide

- superfície condutora: correntes de Foucault (slides e anéis)

(3) Variando a orientação relativa entre circuito e campo:



$$\vec{B} = -B \hat{j}, \quad \vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

$$\hat{A} \cdot \hat{j} = \cos(\omega t + \varphi)$$

↳ ângulo entre $\hat{A}$ e $\hat{j}$ no instante adotado como $t=0$.

$$\therefore -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(-BA \cos(\omega t + \varphi))}{dt} = \omega B A \sin(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_{\text{ind}}$$

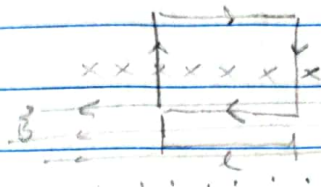
↳ slides, minutas, livros.

(*) Applying $d\vec{F}_L = I d\vec{L} \times \vec{B}$, $\Rightarrow \vec{F}_L = I \vec{L} \times \vec{B}$ now a
has to be used.

• Campo elétrico induzido: $\mathcal{E}_{ind} = \frac{W?}{q}$: ? : força sobre cargas: W_{el}

Solenóide longo (i.e. "infinito" - longe das bordas):

Pela Lei de Ampère:

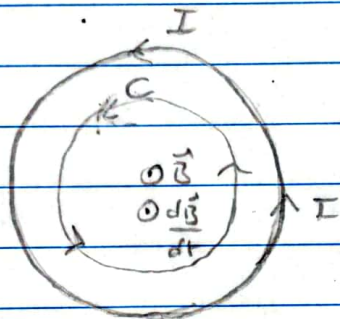


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot l = \mu_0 I_{int} = \mu_0 N I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l}$$

região interna;

na região externa, $B=0$.

Visão lateral:



$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi r = \begin{cases} -\pi r^2 \frac{dB}{dt} & p/ r < R \\ -\pi R^2 \frac{dB}{dt} & p/ r > R \end{cases}$$

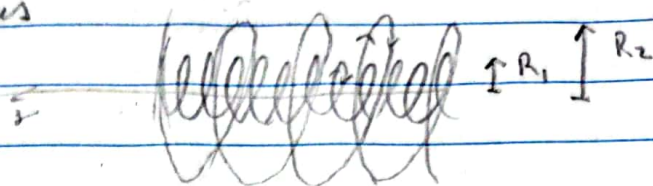
$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_{ind} &= -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad \forall r \in (0, R) \end{aligned} \right.$$

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \quad \forall r \in (R, \infty)$$

→ 1º campo elétrico!!! (Se não v. eletrostático!)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \iff \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} !$$

Exemplo: par de solenoides



longe das bordas:
$$\vec{B}_i = \begin{cases} \mu_0 \frac{N_i I_i}{l} \hat{e} & p/ r \in (0, R_i) \\ \vec{0} & p/ r > R_i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1 \rightarrow 2} &= \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 \\ &= N_2 \int_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_1 \\ &= N_2 \cdot \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} \pi R_1^2 \\ &= \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi R_1^2 I_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2 \rightarrow 1} &= \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{a}_1 \\ &= N_1 \int_{A_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{a}_1 \\ &= N_1 \cdot \frac{\mu_0 N_2}{l} \cdot I_2 \pi R_1^2 \\ &= \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi R_1^2 I_2 \end{aligned}$$

$$\therefore \Phi_{i \rightarrow j} = L_{ji} I_i$$

* Sobre L_{ji} :

- Análise dimensional: $[L_{ji}] = \frac{T m^2}{A} = \frac{V \cdot s}{A} = H$ (Henry);

- É geral (e demonstrável) que:

$$L_{ij} = L_{ji};$$

- Depende da geometria das duas distribuições de corrente.

↳ No caso acima: $L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi R_1^2 = L_{21}$. Agora...

... vejamos:

$$\frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_2 \Rightarrow I_2 \Rightarrow \Phi_{2 \rightarrow 1},$$

$$\text{e } \frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_1 \Rightarrow I_1 \Rightarrow \Phi_{1 \rightarrow 2},$$

$$L_{12} = L_{21} :$$

INDUTÂNCIA
MÚTUA

$$\text{e mais! : } \frac{dI_1}{dt} \Rightarrow \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 1}}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_1$$

$$L_1 \text{ (idem } L_2) :$$

AUTOINDUTÂNCIA!

$\Phi_{i \rightarrow i} = L_i I_i$: L 's (as autoindutâncias) dependem da geometria da distribuição de corrente:

↳ lembrem de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} I d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} I d\vec{r}' \times \frac{\hat{d}}{d^2}$$

1. $L \neq 0$ sempre!!

Logo:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_i = -L_i \dot{I}_i - L_{ij} \dot{I}_j$$

convenção de sinal da fem:

$\mathcal{E}_i > 0$ se no mesmo sentido de I_i :

$\dot{I}_i > 0 \leadsto \mathcal{E} < 0$, p.ex.

*) Notação : $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$

$\dot{coisa} = \frac{dcoisa}{dt}$