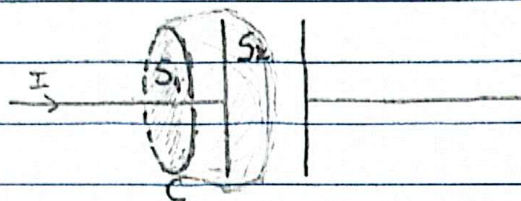


Das equações de Maxwell às ondas eletromagnéticas

I) Revisitando o eletromagnetismo:

Consideremos um capacitor em processo de carga:



$$q(t) = q_f (1 - e^{-t/RC})$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-t/RC}$$

corrente no circuito durante a carga = "fluxo" de carga que "chega" ao capacitor

Aplicando a lei de Ampère ao percurso C , tem-se:

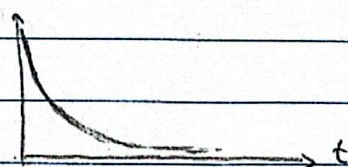
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{a} \stackrel{?}{=} \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{a} \right), \quad (1)$$

onde a superfície S_1 é atravessada por uma densidade de corrente $\vec{J}$, porém não a S_2 , o que nos leva à seguinte conclusão:

- ou $\vec{B}$ na região não satisfaz todas as hipóteses para a validade do teorema de Stokes;
- ou a lei de Ampère como expressa acima está incompleta, devendo ser reformulada.

um tanto estranho não? que um capacitor em carga geraria um campo magnético externo assim...

Nesse caso, o resultado da integral sobre S_2 deve ter o mesmo comportamento que o resultado da integral sobre S_1 , $I(t)^*$:



* Supondo que a adequação à lei de Ampère se anule na integração sobre S_1 .

Analisemos então $I(t)$ ao que ocorre através de S_2 — no capacitor portanto:

$$I(t) = \frac{dq}{dt}, \text{ onde } q = C \cdot \Delta V \\ = C \cdot E d \\ = \frac{\epsilon A}{d} \cdot E d = \epsilon \cdot \Phi_E,$$

$$\therefore I(t) = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} =: I_d \quad \text{--- "corrente de deslocamento"} \\ = \epsilon \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a} =: \int_{S_2} \vec{J}_d \cdot d\vec{a} \quad \text{--- "densidade de corrente de deslocamento",}$$

de modo que se somarmos, no lado direito da lei de Ampère, esta chamada corrente de deslocamento (proporcional à taxa de variação temporal do fluxo elétrico) à corrente livre / de condução, temos válidas as duas igualdades em (1).

Podemos melhor fundamentar essa adequação da lei de Ampère empregando a equação de continuidade, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, que expressa a conservação de carga localmente, e a propriedade de que o divergente de um rotacional é identicamente nulo*:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{J}_d \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

* Demonstração, utilizando o tensor antisimétrico ϵ_{ijk} :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j B_k \\&= \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j B_k \\&= \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_i B_k \\&= -\epsilon_{jik} \partial_i \partial_j B_k \\&= -\epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j B_k \\&= -\partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j B_k \\&= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \quad \forall \vec{B}$$

v.:

youtu.be/ODTn2GeLI
dY

* youtu.be/mpcPKrxUPF4.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0, \text{ quaisquer que sejam as configurações}$$

ou dinâmicas dos campos elétricos e magnéticos, de modo que o termo $\vec{J}$ a ser adicionado à densidade de corrente livre $\vec{J}$ é $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. *

II) As equações de Maxwell:

As quatro leis do eletromagnetismo podem ser expressas em forma integral (global) ou diferencial (local). No vácuo:

Lei de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

Lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Lei de Faraday-Lenz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5)$$

* Ordem de grandeza de $\frac{J_d}{J}$ para valores típicos de condutividade

elétrica σ e frequência angular ω de oscilação do campo elétrico numa corrente alternada:

$$\begin{aligned}\frac{J_d}{J} &= \frac{\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}{\sigma E} = \frac{\epsilon_0}{\sigma E} \left| \frac{\partial (\epsilon_0 e^{i\omega t})}{\partial t} \right| \\ &= \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{|\epsilon_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega|}{|\epsilon_0 e^{i\omega t}|} = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \cdot \omega \\ &= \epsilon_0 \cdot \frac{\omega}{\sigma}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{2\pi \cdot 60}{10^7} = \frac{30}{9 \cdot 10^{16}}$$

$$\sim 10^{-16}$$

Em meios materiais, as equações de Maxwell costumam ser expressas em termos dos campos $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ e $\vec{H}$ *:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2')$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5')$$

III) Obtendo as equações de onda:

A relação entre derivadas temporais e espaciais nas equações de Maxwell (2-5), junto à lembrança de que ondas (i.e. dinâmicas em propagação) são descritas pela equação

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

nos urge explorar as derivadas segundas a partir das equações de Maxwell. Iniciemos, por simplicidade, pelas temporais.

* V. notas de revisão sobre meios dielétricos e magnéticos.

Em resumo:

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} .$$

polarização

no dielétrico: momento de dipolo elétrico por unidade de volume

$$\vec{H} := \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu} .$$

magnetização

no material: momento de dipolo magnético por unidade de volume

Partindo da lei de Ampère (4) :

$$\begin{aligned}
 \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \\
 &= \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \\
 &= -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (5) \\
 &= -\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad * \\
 &= -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \rho + \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad \text{eq. de continuidade}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

Logo, no vácuo ^{**} temos :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v_e^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (6)$$

Uma equação de onda para o campo elétrico com

$$v_e^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

(*) Demonstrações com o tensor antisimétrico:

↳ v. os vídeos:

youtu.be/ODTn2

GeLI dY

²
youtu.be/mpc

PKrxUPF4

$$(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l E_m$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l E_m$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l E_m$$

$$= \partial_j \partial_i E_j - \partial_j \partial_j E_i$$

$$= \partial_i (\partial_j E_j) - (\partial_j \partial_j) E_i$$

$$= \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) E_i \quad \square$$

✖✖ No vácuo tem-se $\rho = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$, contudo observamos que ρ uniforme e $\vec{J}$ constante são condições suficientes para a validade da equação homogênea (6).

Agora, partindo da lei de Faraday (5):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\
 &= -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
 &= -\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J} \right) \quad (4) \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right) \quad * \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{J} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{B} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}$$

Logo, no vácuo ** temos:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v_B^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (7)$$

uma equação de onda para o campo magnético com

$$v_B^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

* Novamente empregando a identidade

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} .$$

*** Vemos, neste caso, que uma densidade de corrente irrotacional $\vec{V}$ condição suficiente para a validade da equação homogênea (7).

Vemos, assim, que as equações de Maxwell no vácuo implicam que os campos elétrico e magnético satisfazem equações de onda com a mesma velocidade de propagação

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

↳ velocidade de propagação
de ondas eletromagnéticas no vácuo
≡ luz!

questões ... :

- soluções harmônicas : monocromáticas
- e soluções não harmônicas : c?
- velocidade de grupo?
- e fora do vácuo?
- na propagação?
- na geração?
- propriedades gerais?