

Ondas eletromagnéticas em meios materiais

1

Em termos dos campos auxiliares:

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} := \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m), \quad \leftarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad \leftarrow \vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

p/ materiais
lineares

as equações de Maxwell são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Na ausência de cargas e correntes livres ($\rho=0$ e $\vec{J}=0$),

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Downarrow \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Downarrow \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

no lugar de $\mu_0 \epsilon_0$, usamos ϵ como no vácuo

$\therefore$ Mesmas equações de onda, mas com velocidade v :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

com

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_m \mu_0 \kappa_e \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa_m \kappa_e}}$$

Denotamos a razão $\frac{c}{v} =: n = \sqrt{\kappa_m \kappa_e}$

$$\approx \sqrt{\kappa_e}$$

em geral,
 $\kappa_m \approx 1$ (maior exceto p/ materiais ferromagnéticos)

que em geral é maior que 1, do que inferimos que em geral
 $v < c$.

Assim, para ondas em tais materiais lineares tem-se:

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad \text{e} \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\omega = k v = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = \frac{2\pi}{T}$$

As equações de Maxwell aplicadas à interface entre dois meios quaisquer leva à necessidade de serem satisfeitas as seguintes condições de contorno para as componentes paralelas (||) e perpendiculares ($\perp$) à interface:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp} \quad (\text{I})$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \boxed{B_1^\perp = B_2^\perp} \quad (\text{II})$$

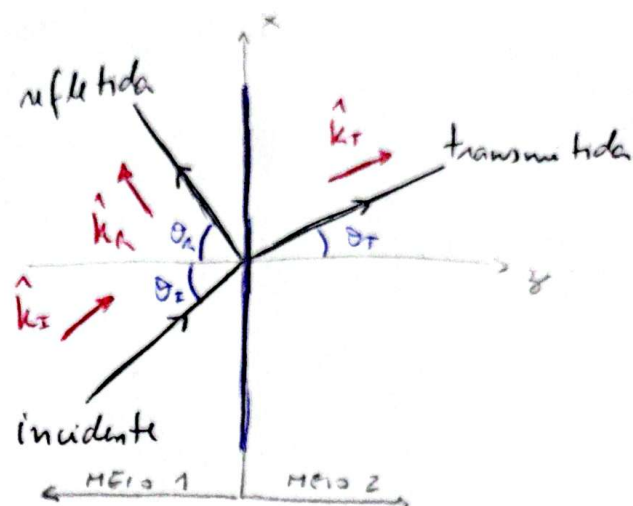
$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_1^\parallel = \vec{E}_2^\parallel} \quad (\text{III})$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^\parallel} \quad (\text{IV})$$

Comportamento ondulatório na interface de dois materiais:

$$z=0$$

Na interface, temos a superposição de três ondas, cada qual a parte real da função complexa:



$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} & \vec{B}_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_i} \hat{k}_i \times \vec{E}_i \\ \vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} & \vec{B}_r(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_i} \hat{k}_r \times \vec{E}_r \\ \vec{E}_t(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} & \vec{B}_t(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_t} \hat{k}_t \times \vec{E}_t \end{array} \right.$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{E}_{0i} = E_{0i} \hat{e}_i, & \hat{e}_i \cdot \hat{k}_i = 0 \\ \vec{E}_{0r} = E_{0r} \hat{e}_r, & \hat{e}_r \cdot \hat{k}_r = 0 \\ \vec{E}_{0t} = E_{0t} \hat{e}_t, & \hat{e}_t \cdot \hat{k}_t = 0 \end{array} \right.$$

em termos das amplitudes complexas E_0 e dos vetores de polarização $\hat{e}$.

5

A mera existência de condições de contorno, seja (I) ou (III) para $\vec{E}$, ou (II) ou (IV) para $\vec{B}$, implica a validade, na interface, de equações da forma

$$\underline{(\dots) e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} + (\dots) e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\dots) e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}}$$

$\forall t, \forall \vec{r} \in \text{interface}$, onde os termos $(\dots)$ se distinguem
i.e. $\forall x, y$

para uma ou outra condição (I) - (IV).

A única forma destas equações serem satisfeitas para x e y arbitrários (i.e. em toda a interface) é que

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r} \quad \forall \vec{r} = (x, y, 0)$$

ou seja:

$$\cancel{k_{Ix}} \cdot x + k_{Iy} \cdot y = \cancel{k_{Rx}} \cdot x + k_{Ry} \cdot y = \cancel{k_{Tx}} \cdot x + k_{Ty} \cdot y \quad \forall x, y$$

o que por uma vez só é satisfeito em geral se:

$$k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx} \quad \text{e} \quad k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty}$$

o que significa que $\vec{k}_I, \vec{k}_R$ e $\vec{k}_T$ só diferem entre si em suas componentes z !

$\therefore$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_I, \vec{k}_R \text{ e } \vec{k}_T \text{ pertencem todos} \\ \text{a um mesmo plano!} \end{array} \right.$
plano de incidência!

Tomando o plano de incidência como o plano xy da ilustração da p.4, então

$$k_{Ix} = k_{Rx} \Rightarrow k_I \cdot \sin \theta_I = k_R \cdot \sin \theta_R$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda \cdot v_1} \cdot \sin \theta_I = \frac{2\pi}{\lambda \cdot v_1} \cdot \sin \theta_R$$

$$\Rightarrow \sin \theta_I = \sin \theta_R$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_I = \theta_R} \quad \text{lei da reflexão}$$

e

$$k_{Ix} = k_{Tx} \Rightarrow k_I \cdot \sin \theta_I = k_T \cdot \sin \theta_T$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda \cdot v_1} \cdot \sin \theta_I = \frac{2\pi}{\lambda \cdot v_2} \cdot \sin \theta_T$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{c} \cdot \sin \theta_I = \frac{n_2}{c} \cdot \sin \theta_T$$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 \cdot \sin \theta_I = n_2 \cdot \sin \theta_T}$$

↓
n's : índices de refração!
(relativos ao vácuo)

lei da refração
(lei de Snell)

* Destaque:

Esses três resultados são consequência da imposição de alguma condição de contorno por toda a interface, sendo portanto característicos da incidência, reflexão e transmissão de qualquer onda!

Aplicando as condições de contorno específicas (I)-(IV),

17

e empregando a decomposição de uma onda com polarização arbitrária em perpendicular (TE, transversal elétrica) e paralela (TM, transversal magnética) ao plano de incidência, pode-se calcular (v. Apêndice) as amplitudes de reflexões

$$r := \frac{E_{0R}}{E_{0I}}$$

e de transmissão

$$t := \frac{E_{0T}}{E_{0I}}$$

Os resultados para meios não-condutores e não magnéticos

são:

$$r_{TE} = \frac{n_1 \cos \theta_I - n_2 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_I + n_2 \cos \theta_T} = \frac{\cos \theta_I - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_I}}{\cos \theta_I + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_I}} = \frac{-\sin(\theta_I - \theta_T)}{\sin(\theta_I + \theta_T)}$$

$$r_{TM} = \frac{n_1 \cos \theta_T - n_2 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_T + n_2 \cos \theta_I} = \frac{n_{21}^2 \cos \theta_I - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_I}}{n_{21}^2 \cos \theta_I + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_I}} = \frac{\tan(\theta_I - \theta_T)}{\tan(\theta_I + \theta_T)}$$

$$t_{TE} = \frac{2 n_1 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_I + n_2 \cos \theta_T} = \frac{2 \cos \theta_I}{\cos \theta_I + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_I}} = \frac{2 \sin \theta_T \cos \theta_I}{\sin(\theta_I + \theta_T)}$$

$$t_{TM} = \frac{2 n_1 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_T + n_2 \cos \theta_I} = \frac{2 n_{21} \cos \theta_I}{n_{21}^2 \cos \theta_I + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_I}} = \frac{2 \sin \theta_T \cos \theta_I}{\sin(\theta_I + \theta_T) \cos(\theta_I - \theta_T)}$$

Onde $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$ é o índice de refração do meio de transmissão relativo ao meio de incidência.

fa' a razão entre as correspondentes intensidades define os coeficientes de reflexão e de transmissão, ou, respectivamente, refletividade (R) e transmissividade (T):

$$R := \frac{I_R}{I_i} = |r|^2 = r \cdot r^*$$

$$T := \frac{I_T}{I_i} = |t|^2 = t \cdot t^*$$

correspondendo assim à proporção das energias refletida e transmitida em relação à incidente.

Analisando os resultados (v. gráficos nos slides), temos as seguintes constatações:

$$1^\circ: n_{21} > 1$$

- Para $\theta_i \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $t \rightarrow 0$ e $r \rightarrow 1$ (ambos TE e TM).
{
incidência
rasante

• Até $n_{21} \approx 3$, $|t| > |r|$ para pequenos ângulos de incidência θ_i — i.e. para incidência normal (ou quase), a transmissão é maior que a reflexão até $n_{21} \approx 3$, e a partir de então ($n_{21} > 3$) há mais reflexão que transmissão (p/ incidência normal ou quase!).

- $r_{TE} < 0 \ \forall \ \theta_i$: a componente TE tem sempre sua fase invertida na reflexão.

- R_{TE} monotonicamente crescente com θ_i .
- R_{TM} assume valor mínimo igual a zero:

$$R_{TM}(\theta_B) = 0$$

↳ ângulo de Brewster:

$$r_{TM} = 0 \Leftrightarrow n_1 \cos \theta_T - n_2 \cos \theta_I = 0 \Leftrightarrow n_1 \cos \theta_T = n_2 \cos \theta_I$$

$$\xRightarrow{\text{Snell}} n_1 n_2 \sin \theta_T \cos \theta_T = n_1 n_2 \sin \theta_I \cos \theta_I$$

$$\Rightarrow \sin(2\theta_T) = \sin(2\theta_I)$$

$$\Rightarrow \pi - 2\theta_T = 2\theta_I$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_I + \theta_T = \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{ou: } r_{TM} = \frac{\tan(\theta_I - \theta_T)}{\tan(\theta_I + \theta_T)}$$

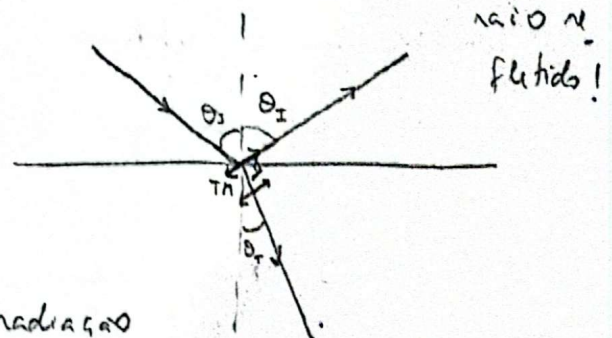
→ 0 para

$$\tan(\theta_I + \theta_T) \rightarrow \infty,$$

$$\text{i.e. para } \theta_I + \theta_T \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

INTERPRETAÇÃO FÍSICA!

Quando isso acontece, o ângulo entre os raios transmitido e refletido é 90° , o que para a componente TM significa que o raio refletido está no eixo de vibração das cargas, e portanto* não há ondas TM na direção do



* Cargas e dipolos oscilantes emitem radiação eletromagnética exceto em sua direção de oscilação.

Aplicando à lei da refração (Snell), temos:

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin (\pi/2 - \theta_B)$$

$$= n_2 \left(\sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta_B - \sin \theta_B \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= n_2 \cdot \cos \theta_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \theta_B = n_{21}} !$$

$$\bullet \frac{R_{TM}}{R_{TE}} = \frac{\cos^2(\theta_I + \theta_T)}{\cos^2(\theta_I - \theta_T)} = \begin{cases} 1 \text{ p/ } \theta_I = 0 \text{ (incidência normal)} \\ 0 \text{ p/ } \theta_I = \theta_B \text{ (polarização por reflexão)} \end{cases}$$

$$\boxed{Z^o: n_{21} < 1}$$

- $r_{TE} > 0 \quad \forall \theta_I$: componente TE mantém fase na reflexão.
- Também tem a polarização por reflexão no ângulo de Brewster:

$$\underbrace{\tan(\theta'_B)}_{\text{cuidado:}} = n_{21} \quad \text{e} \quad \theta'_B + \theta_I = \frac{\pi}{2}, \text{ com a mesma interpretação (ângulo) física que para o caso } n_1 > 1.$$

a expressão é a

mesma mas os

ângulos são diferentes - p.ex. :

- Interface ar $\rightarrow$ vidro : $n_1 \approx 1,5$

$$\theta_B \approx \arctan\left(\frac{3}{2}\right),$$

- Interface vidro $\rightarrow$ ar : $n_1 \approx \frac{1}{1,5}$

$$\theta'_B \approx \arctan\left(\frac{2}{3}\right).$$

- $r = 1$ a partir de dado $\theta_i = \theta_c$:
 $\searrow$ ângulo crítico

↳ Snell:

$$\text{há transmissão} \Rightarrow n_2 \sin \theta_T = n_1 \sin \theta_I$$

$$\Rightarrow \sin \theta_T = n_{12} \sin \theta_I \leq 1$$

$$\Rightarrow \sin \theta_I \leq n_{21},$$

$$\therefore \theta_I > \arcsin(n_{21}) \Rightarrow \text{não há transmissão!}$$

$$\sin \theta_c = n_{21}$$

mais complicada: $t_{TE}, t_{TM} \in \mathbb{C}$,
 com $\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_I}$ imaginário:
 pode haver "infiltração" de luz para um meio mais denso

- r 's têm parte imaginária também:

diferença de fase entre raios refletidos e incidente,

v. gráficos nos slides

Aborção e Dispersão:

12

Indo além da idealização: $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ com χ_e etc!
↓
susceptibilidade elétrica

Modelando os dipolos como osciladores forçados amortecidos:



x: deslocamento a partir do equilíbrio

Momento de dipolo:

$$\vec{p}(t) = q \cdot \vec{x}(t)$$

Eq. de movimento:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}_{restauradora} + \vec{F}_{amortecimento} + \vec{F}_{externo}$$

$$= \underbrace{-m \omega_0^2 \vec{x}}_{\substack{\text{aproximando} \\ \text{poço de potencial} \\ \text{p/ trecho de parâ.} \\ \text{sóla p/ pquos deslocam.}}} - m \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + q \vec{E}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{p}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \epsilon_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{p}(t) = q \cdot \vec{x}(t)$$

de modo que a densidade de momento de dipolo por unidade de volume torna-se:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{N q^2 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega} \vec{E}$$

$\nearrow$ n° de dipolos/volume
 $\nwarrow$ características da estrutura e composição do meio
 $\searrow$ frequência de oscilação do campo

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left[1 + \frac{N q^2 / m}{\epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega)} \right] \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{n^2}{c^2}$$

$$\therefore n = n(\omega) = n_{re} + i n_{im} !$$

Soluções:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \underbrace{e^{-n_{im} k_0 z}}_{\text{atenuação!}} \cdot \underbrace{e^{i(n_{re} k_0 z - \omega t)}}_{\text{oscilação com maior } k:}$$

$$\text{menor } \lambda: \lambda = \frac{\lambda_0}{n_{re}}$$

comprimento de onda no vácuo!

• Índice de refração complexo =

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{Nq^2/m}{\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}} = n_{re} + i n_{im}$$

na verdade

é uma soma
para todos os

"tipos" de dipolo na composição do material,
havendo mais de um ω_0 e mais de um γ
para um dado meio!

vide nos slides!

• Em geral, n_{im} cessa para $\omega \rightarrow \omega_0$!

para a maioria dos materiais
transparentes, estas frequências
estão na região ultravioleta
do espectro!

• Assim, a relação $\omega = \frac{c}{n} \cdot k$ passa a ser

$$\omega = \frac{c}{n} \cdot k,$$

de modo que

$$n_{re} = n_{re}(\omega)!$$

dispersão!

para a maioria dos mate-
riais transparentes, o índice
de refração n_{re} é menor, no
espectro visível, para o violeta
do que para o vermelho!

prisma!

Ate' aqui, ainda estamos lidando com meios isotrópicos...

* Meios anisotrópicos : - mais complicados, mas há formalismo,
 - depende da estrutura intermolecular / cristalina.
 molecular

um exemplo interessante : $n_{\parallel}$ grande numa direção,
 pequeno em outra :

diacrisismo
 ↓
polarizadores!
 ↓
v. slides

Propagação e atenuação em condutores:

• $\underbrace{\text{Ohm} + \text{Maxwell} + \text{conservação de carga}}_{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \Rightarrow \underbrace{\rho(t) = \rho(0) \cdot e^{-(\sigma/\epsilon)t}}_{\tau = \epsilon/\sigma \sim 10^{-19} \text{ s}}$
 p/ ωb, p. ex.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k \cdot z - \omega t)}$$

com $k^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega = k(\omega) = k_{re} + i k_{im}$
 } dispersivo
 absorção ↔ condutividade

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_0 \underbrace{e^{-k_{im} \cdot z}}_{d} \cdot e^{i(k_{re} z - \omega t)}$$

$d := \frac{1}{k_{im}}$: skin depth !

(profundidade de penetração do campo no condutor)

depende de ω !!

(e tem aplicações importantes!)

- Defasagem entre os campos elétricos e magnéticos:

Tomando como exemplo uma onda linearmente polarizada:

$$\vec{E} = E_0 e^{-k_z z} e^{i(k_x z - \omega t)} \hat{x},$$

aplicando nas equações de Maxwell com $\vec{J} = \sigma \vec{E}$:

$$\Rightarrow \vec{B} = \underbrace{\frac{k}{\omega} E_0 e^{-k_z z} e^{i(k_x z - \omega t)}}_{\hat{y}}$$

$$\Rightarrow \frac{B_0}{E_0} = \frac{k}{\omega} = \frac{K e^{i\varphi}}{\omega}$$

$$\therefore \underbrace{\vec{B} \text{ e } \vec{E} \text{ defasados!}}_{\text{v. slides}}$$

- Reflexão em condutores:

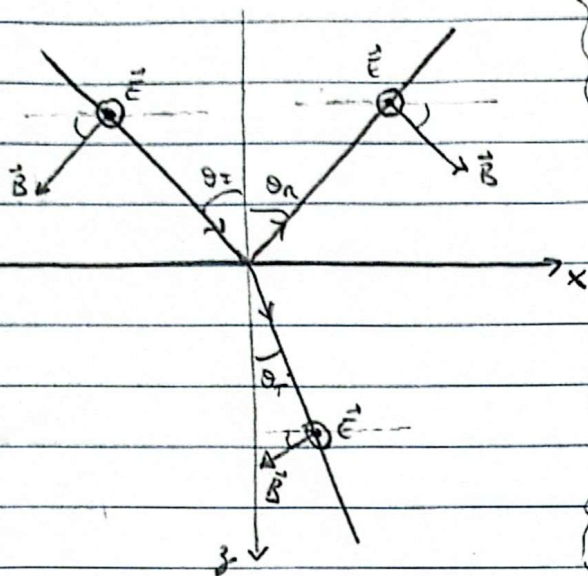
São válidas outras condições de contorno (distintas daquelas para dielétricos), devido aos termos de corrente nas equações de Maxwell, levando a outras expressões para as amplitudes de reflexo e transmissão.

Em bons condutores, $r \approx -1$ e $t \ll 1$, independentemente da polarização TM ou TE.

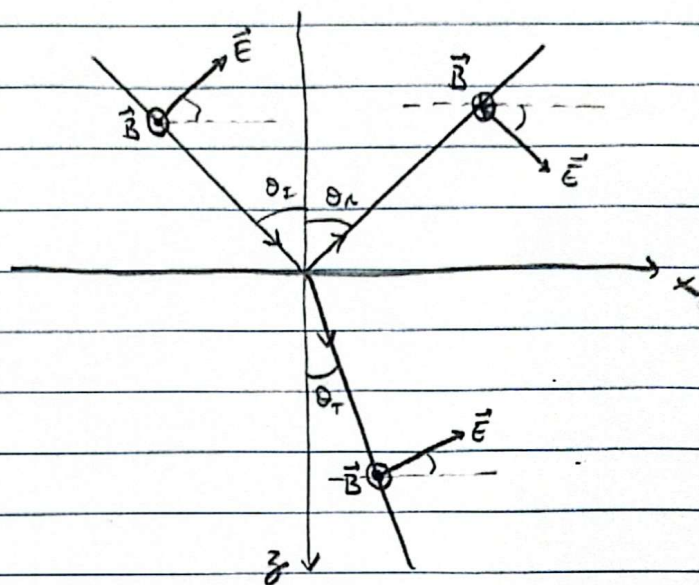
amplitudes e coeficientes de reflexão e transmissão.

Plano de incidência : xz .

Polarização TE :



Polarização TM :



em relação à interface :

$$E^\perp = 0, \quad E'' = E,$$

$$B^\perp = \pm B \sin \theta,$$

$$B'' = \pm B \cos \theta.$$

em relação à interface :

$$B^\perp = 0, \quad B'' = B,$$

$$E^\perp = \pm E \sin \theta,$$

$$E'' = \pm E \cos \theta.$$

Condições de contorno :

$$(III) \quad E_1'' = E_2''$$

$$(II) \quad B_1^\perp = B_2^\perp$$

$$(IV) \quad \frac{1}{\mu_1} B_1'' = \frac{1}{\mu_2} B_2''$$

Condições de contorno :

$$(I) \quad \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp$$

$$(III) \quad E_1'' = E_2''$$

$$(IV) \quad \frac{1}{\mu_1} B_1'' = \frac{1}{\mu_2} B_2''$$

TE

TM

$$\boxed{E_{0I} + E_{0R} = E_{0T}}; \quad (1_{TE})$$

$$\frac{1}{v_1} E_{0I} \cos \theta_I + \frac{1}{v_1} E_{0R} \cos \theta_R = \frac{1}{v_2} E_{0T} \cos \theta_T$$

$$\Rightarrow n_1 (E_{0I} + E_{0R}) \cos \theta_I = n_2 E_{0T} \cos \theta_T$$

que é redundante com (1_{TE});

$$-\frac{1}{v_1 \mu_1} E_{0I} \cos \theta_I + \frac{1}{v_1 \mu_1} E_{0R} \cos \theta_R = -\frac{1}{v_2 \mu_2} E_{0T} \cos \theta_T$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{\mu_1} (E_{0I} - E_{0R}) \cos \theta_I = \frac{n_2}{\mu_2} E_{0T} \cos \theta_T} \quad (2_{TE})$$

$$-E_1 E_{0I} \cos \theta_I + E_1 E_{0R} \cos \theta_R = -E_2 E_{0T} \cos \theta_T$$

$$\Rightarrow (E_{0I} - E_{0R}) \cdot \frac{n_1^2}{\mu_1} \cos \theta_I = E_{0T} \frac{n_2^2}{\mu_2} \cos \theta_T$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{\mu_1} (E_{0I} - E_{0R}) = \frac{n_2}{\mu_2} E_{0T}} \quad (1_{TM})$$

$$E_{0I} \cos \theta_I + E_{0R} \cos \theta_R = E_{0T} \cos \theta_T$$

$$\Rightarrow \boxed{(E_{0I} + E_{0R}) \cos \theta_I = E_{0T} \cos \theta_T} \quad (2_{TM})$$

$$\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{v_1} (E_{0I} - E_{0R}) = \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{v_2} E_{0T}$$

que é redundante com (1_{TM}).

Utilizando notação provisória

m_i, m_r, m_t :

com notação provisória e_i, e_r, e_t :

$$\begin{cases} e_i + e_r = e_t \\ S_1 (e_i - e_r) \cos \theta_I = S_2 e_t \cos \theta_T \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 (m_i - m_r) = S_2 m_t \\ \cos \theta_I (m_i + m_r) = \cos \theta_T m_t \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1 (e_i - e_r) \cos \theta_I = S_2 (e_i + e_r) \cos \theta_T \Rightarrow S_1 (m_i - m_r) = S_2 \frac{\cos \theta_I}{\cos \theta_T} (m_i + m_r)$$

$$\Rightarrow e_i (S_1 \cos \theta_I - S_2 \cos \theta_T) = e_r (S_1 \cos \theta_I + S_2 \cos \theta_T)$$

$$\Rightarrow S_1 \cos \theta_T (m_i - m_r) = S_2 \cos \theta_I (m_i + m_r)$$

$$\Rightarrow m_i (S_1 \cos \theta_T - S_2 \cos \theta_I) = m_r (S_1 \cos \theta_T + S_2 \cos \theta_I)$$

$$\Rightarrow e_t = e_i \left(\frac{1 + S_1 \cos \theta_I - S_2 \cos \theta_T}{S_1 \cos \theta_I + S_2 \cos \theta_T} \right)$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{S_1}{S_2} m_i \left(\frac{1 - S_1 \cos \theta_I - S_2 \cos \theta_T}{S_1 \cos \theta_T + S_2 \cos \theta_I} \right)$$

... o que nos leva às seguintes equações para as razões entre as amplitudes:

$$r := \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \quad \text{e} \quad t := \frac{E_{0T}}{E_{0I}}$$

geral

meios não-condutores não-magnéticos

$$r_{TE} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_I - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_T}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_I + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_T} = \frac{n_1 \cos \theta_I - n_2 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_I + n_2 \cos \theta_T} = \frac{\cos \theta_I - \sqrt{n_{21}^2 - \mu_{n1}^2 \theta_I}}{\cos \theta_I + \sqrt{n_{21}^2 - \mu_{n1}^2 \theta_I}}$$

$$r_{TM} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_T - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_I}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_T + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_I} = \frac{n_1 \cos \theta_T - n_2 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_T + n_2 \cos \theta_I} = \frac{n_{21}^2 \cos \theta_I - \sqrt{n_{21}^2 - \mu_{n1}^2 \theta_I}}{n_{21}^2 \cos \theta_I + \sqrt{n_{21}^2 - \mu_{n1}^2 \theta_I}}$$

$$t_{TE} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_I}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_I + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_T} = \frac{2 n_1 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_I + n_2 \cos \theta_T} = \frac{2 \cos \theta_I}{\cos \theta_I + \sqrt{n_{21}^2 - \mu_{n1}^2 \theta_I}}$$

$$t_{TM} = \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_I}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_T + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_I} = \frac{2 n_1 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_T + n_2 \cos \theta_I} = \frac{2 n_{21} \cos \theta_I}{n_{21}^2 \cos \theta_I + \sqrt{n_{21}^2 - \mu_{n1}^2 \theta_I}}$$