

Propriedades das ondas eletromagnéticas planas

I) Transversalidade:

$$\text{No vácuo, } \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

com $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$; isto é, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem equações de onda

com a mesma velocidade de propagação c .

Para ondas planas, o vetor de propagação $\vec{k}$ é constante (no tempo) e uniforme (no espaço), sendo as frentes de onda (região de fase constante) planas perpendiculares a $\vec{k}$.

Deste modo, para uma onda eletromagnética ^(EM) plana*, podemos escolher o eixo $\hat{z}$ coincidindo com $\vec{k}$, fazendo com que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sejam constantes no plano xy . Logo, sem perda de generalidade para ondas EM planas, temos

$$\vec{E}(z, t) \text{ e } \vec{B}(z, t).$$

Consideremos primeiramente suas componentes em z :

$$\text{No vácuo, } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \text{ enquanto } \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \text{ vale}$$

inclusive em meios materiais. Logo, ondas EM planas podem atv ter componentes na direção de propagação, porém elas são constantes em z , não caracterizando portanto uma dinâmica em propagação — i.e. uma onda! Tais componentes consistiriam apenas em condições de contorno, não fazendo parte da propagação, sendo "nonwave-like constant fields".**

Concluimos, então, que as ondas eletromagnéticas planas*** no vácuo são ondas transversais!

* Uma idealização para regiões muito distantes da fonte de tal onda.

** F. S. Crawford, Jr.
Waves

Berkeley Physics Course, vol. 3, p. 357.

*** Para analisar ondas esféricas, por exemplo, deve-se aplicar as considerações similares em coordenadas esféricas.

Desenvolvendo as outras equações de Maxwell com $E_z = 0$, $B_z = 0$, $\partial_x = 0$ e $\partial_y = 0$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -\partial_t B_x = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y = -\partial_z E_y \\ -\partial_t B_y = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z = \partial_z E_x \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \partial_t E_x = c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x = c^2 (\partial_y B_z - \partial_z B_y) = -c^2 \partial_z B_y \\ \partial_t E_y = c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})_y = c^2 (\partial_z B_x - \partial_x B_z) = c^2 \partial_z B_x \end{cases}$$

Portanto, as componentes E_x e B_y estão acopladas, bem como as componentes E_y e B_x . Já as componentes E_x e E_y não guardam nenhum vínculo entre si, de modo que temos dois pares de soluções independentes: (E_x, B_y) e (E_y, B_x) .

Como soluções gerais da equação de onda para $\vec{E}$, tanto E_x como E_y têm solução geral da forma

$$f_1(z-ct) + f_2(z+ct).$$

Restringindo-nos a ondas progressivas, temos propagação no sentido $+\hat{z}$, com

$$\begin{cases} E_x(z,t) = E_x(z-ct) \\ E_y(z,t) = E_y(z-ct) \end{cases}$$

Com tais soluções, podemos empregar a relação $\partial_t \equiv -c \partial_z$, juntamente às equações acopladas (E_x, B_y) e (E_y, B_x) , obter as duas soluções independentes para $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_1(z-ct) \hat{x}, & \vec{B}_1 = \frac{1}{c} E_1(z-ct) \hat{y} \\ \vec{E}_2 = E_2(z-ct) \hat{y}, & \vec{B}_2 = -\frac{1}{c} E_2(z-ct) \hat{x} \end{cases}$$

* Denotamos, para facilitar, $\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x$ e $\frac{\partial}{\partial y} \equiv \partial_y$; idem para ∂_z e ∂_t .

$$\begin{aligned}
 ** \quad \frac{\partial}{\partial t} \xi(z-ct) &= \frac{\partial \xi(z-ct)}{\partial (z-ct)} \cdot \frac{\partial (z-ct)}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial \xi(z-ct)}{\partial z} \cdot (-c) \quad \therefore \partial_t = -c \partial_z.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *** \quad \left. \begin{aligned} \partial_z E_x &= -\partial_t B_y = -(-c \partial_z) B_y \\ &= c \partial_z B_y \\ \partial_t E_x &= -c^2 \partial_z B_y = c(-c \partial_z) B_y \\ &= c \partial_t B_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_x = c B_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \partial_z E_y &= \partial_t B_x \\ &= -c \partial_z B_x \\ \partial_t E_y &= c^2 \partial_z B_x = -c(-c \partial_z B_x) \\ &= -c \partial_t B_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_y = -c B_x
 \end{aligned}$$

Em ambos os casos,

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E}, \quad (1)$$

relações que vale portanto para qualquer combinação linear das soluções $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ e $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$. Podemos escrever então, para qualquer onda eletromagnética plana e progressiva no vácuo:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}, \quad (1')$$

sendo $\hat{k}$ o vetor de propagação.*

Uma consequência direta de (1') é que, em tais ondas, os campos elétrico e magnético têm a mesma frequência e comprimento de onda, sendo as soluções harmônicas chamadas monocromáticas. Antes de as distinguirmos, vejamos outras propriedades gerais das ondas eletromagnéticas no vácuo.

II) Energia e momento linear:

Consideremos a densidade de energia do campo eletromagnético:

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right),$$

e consideremos sua taxa de variação temporal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot 2 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0} \cdot 2 \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J} \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (-\vec{\nabla} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

Como $\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$ *, então

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0 \quad \forall \vec{r} \quad (2)$$

taxa de variação
da densidade de
energia em $\vec{r}$

fluxo de densidade
de energia em $\vec{r}$

taxa de
trabalho de
energia entre
campos e
matéria
em $\vec{r}$

$\frac{dW_{EM \rightarrow carga}}{dt}$: trabalho
por unidade
de tempo, do
campo sobre
uma densidade
de carga! **

No vácuo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \quad (2')$$

$$\text{onde } \vec{S} := \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (3)$$

tem portanto significado de fluxo de energia eletromagnética!

$\vec{S}$ é denominado vetor de Poynting.

Utilizando a eq. (1'), podemos obter, para ondas eletromagnéticas planas progressivas:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \left(\frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E} \right) \Rightarrow \vec{S} = c \epsilon_0 E^2 \hat{k} \quad (4) ***$$

lembrando que (3) é mais geral.

* Novamente com o tensor anti-simétrico:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) &= A_i \epsilon_{ijk} \partial_j C_k \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial_j (A_i C_k) - \epsilon_{ijk} C_k (\partial_j A_i) \\
 &= -\epsilon_{jki} \partial_j (A_i C_k) + \epsilon_{kji} C_k (\partial_j A_i) \\
 &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) + \vec{C} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ** \quad \frac{dW_{\text{Lorentz}}}{dt} &= \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \vec{v} = \frac{dW_{\text{EM}}}{dt} \\
 &= \rho (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\
 &= \rho \vec{E} \cdot \vec{v} \\
 &= \vec{E} \cdot (\rho \vec{v}) = \vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \epsilon_{\text{matéria}}}{\partial t} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *** \quad (\vec{A} \times (\vec{C} \times \vec{A}))_i &= \epsilon_{ijk} A_j (\vec{C} \times \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} C_l A_m \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j C_l A_m \\
 &= A_j C_i A_j - A_j C_j A_i \\
 &= (\vec{A} \cdot \vec{A}) C_i - (\vec{A} \cdot \vec{C}) A_i \\
 \Rightarrow \vec{A} \times (\vec{C} \times \vec{A}) &= A^2 \vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{A} .
 \end{aligned}$$

Pode-se mostrar, em abordagens mais avançadas, que o vetor de Poynting tem significado de momento linear do campo eletromagnético. Vamos explorar duas formas de compreender este significado no nosso nível de estudos.

Primeiramente, lembremos que interação (força) é troca de momento linear e consideremos a interação do campo eletromagnético com uma densidade de carga local:

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \rho \vec{E} + (\rho \vec{v}) \times \vec{B}$$

$$= \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

$$= (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \left[\frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]$$

$$= \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t}$$

Reorganizando tendenciosamente os termos, temos:

$$\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mu_0 \vec{S}) = \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \right]$$

$$+ \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right]$$

$$\frac{\partial \vec{p}_{matéria}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{S}}{c^2} \right) =$$

Fluxo de momento: para entender este

termo como um

fluxo de momento

linear do campo,

também precisamos

de conhecimentos

mais avançados... *

taxa de
variação do
momento linear
da matéria, por
unidade de volume.

$\vec{p}_{campo}$!

* v. <http://andrealommen.github.io/PHY309/lectures/transmission>.

Esta fluxo é a generalização do divergente para um campo tensorial (em contraste com vetorial):

$$\left(\epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right] \right)_k =$$

$$= \epsilon_0 \left[(\partial_i E_i) E_k + \epsilon_{nij} (E_{ilm} \partial_l E_m) E_j \right] + \frac{1}{\mu_0} (\text{idem } B)$$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow (\partial_i E_i) E_k + \epsilon_{ijn} \epsilon_{ilm} (\partial_l E_m) E_j \\ &= (\partial_i E_i) E_k + (\delta_{jl} \delta_{im} - \delta_{jm} \delta_{il}) (\partial_l E_m) E_j \\ &= (\partial_j E_j) E_k + (\partial_j E_k) E_j - (\partial_k E_j) E_j \\ &= \partial_j (E_j E_k) - \frac{1}{2} \partial_k (E_j E_j) \end{aligned}$$

$$= \partial_i (E_i E_k) - \frac{1}{2} \delta_{ik} \partial_i (E^2)$$

$$= \partial_i \left(E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2 \right),$$

logo a componente "k" do fluxo de momento linear é dada por:

$$\partial_j T_{jk},$$

$$\text{onde } T_{jk} = \epsilon_0 E_j E_k + \frac{1}{\mu_0} B_j B_k - \frac{1}{2} \delta_{jk} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

$$= \epsilon_0 E_j E_k + \frac{1}{\mu_0} B_j B_k - u \cdot \delta_{jk},$$

Embora o conceito de fluxo de momento seja matematicamente mais sofisticado do que os outros aparatos no curso, o cálculo acima mostra que

$$\frac{\vec{S}}{c^2} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (5)$$

seja a densidade de momento linear do campo eletromagnético.

Temos assim duas expressões de leis de conservação: de energia, identificando em (2) $\frac{dW_{em \rightarrow carga}}{dt}$ como a taxa de variação temporal da densidade de energia da matéria, $\frac{\partial \epsilon_{matéria}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \epsilon_{campos}}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_{matéria}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0, \quad (6)$$

em que o vetor de Poynting $\vec{S}$ significa fluxo de densidade de energia; e de momento linear:

$$\frac{\partial \vec{p}_{campos}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{p}_{matéria}}{\partial t} + \vec{\Phi}_{p_{em}} = \vec{0}, \quad (7)$$

onde a densidade de momento linear do campo eletromagnético e $\vec{p}_{campos} = \frac{\vec{S}}{c^2}$ e seu fluxo é dado por:

$$\vec{\Phi}_{p_{em}} = -\epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \right] - \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (8)$$

Por fim, com a densidade de momento linear podemos considerar o momento linear atravessando um elemento de área:

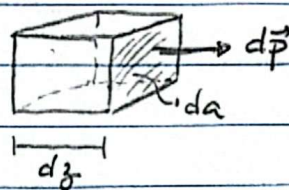
$$\frac{\vec{S}}{c^2} = \vec{p} = \frac{d\vec{p}}{da} = \frac{d\vec{p}}{da dz}$$

$$= \frac{1}{da} \frac{d\vec{p}}{dz}$$

$$= \frac{1}{da} \frac{d\vec{p}}{cdt}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{1}{da} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

momento linear atravessando da por unidade de tempo com a incidência de uma frente de onda.



acompanhando uma frente de onda: $dz = cdt$

Assim, se a frente de onda incide sobre um material, haverá troca de momento entre onda e material, o que veremos mais detalhadamente em breve ao considerar absorção e reflexão da luz. Em todo caso, podemos identificar $\frac{d\vec{p}}{dt}$ como $d\vec{F}$, a

força (i.e. momento linear trocado) por elemento de área de luz incidente, surgindo assim o conceito de pressão de radiação:

$$\frac{d\vec{F}}{da} = \frac{\vec{S}}{c} \quad (9)$$

III) Ondas planas monocromáticas

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0) \end{cases} \quad (10)$$

onde $E_0 = |\vec{E}_0|$ e $B_0 = |\vec{B}_0|$ são, respectivamente, as amplitudes (i.e. valores máximos em módulo) dos campos elétrico e magnético e, lembrando que a propagação das frentes de onda é descrita pela combinação

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k(r - vt),$$

obtem-se as relações

$$\begin{aligned} \omega &= k \cdot v = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \\ &= 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

entre as grandezas características de ondas (progressivas) harmônicas — no caso eletromagnético, luz (ou, de modo mais geral, radiação) monocromática.

Nesse caso, o vetor de Poynting torna-se:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_0 \times \vec{B}_0) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0) \quad (11)$$

$$= \hat{k} \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} [1 + \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\omega t + 2\phi_0)] \quad (11')$$

e portanto $\vec{S}$ oscila, com o dobro da frequência de oscilação dos campos, entre

$$\vec{S} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{S} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \hat{k} = E_0 c E_0^2 \hat{k},$$

mostrando assim que o fluxo de energia oscila mas está sempre no sentido de propagação da onda!

Quanto à frequência de oscilação, lembramos que para a luz visível $\nu \sim 10^{15}$ Hz, de modo que vale considerarmos, para medidas de fluxo de energia (ou demais grandezas diretamente relacionadas ao vetor de Poynting, como a pressão de radiação (9), a densidade de momento linear (5) ou a própria densidade de energia (Exercício 4)), o valor médio de $\vec{S}$ em n ciclos de oscilação dos campos ($n \in \mathbb{N}^+$).

Seja o valor médio de uma função $f(t)$ dado por

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0 + nT} f(t) dt \quad : \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv}$$

mostra-se então (v. Exercício 5.a) que

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0 c}{2} E_0^2 \hat{k} \quad (12)$$

Agora, observamos que $\vec{S}$ é medido, no SI, em

$$\frac{J}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{J/s}{m^2} = \frac{W}{m^2},$$

veremos então que $|\langle \vec{S} \rangle|$ expressa a potência transmitida/propagada por unidade de área, e isto leva à definição da...

intensidade da onda eletromagnética:

$$I = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{k} \quad (13)$$

sendo portanto a potência média, por unidade de área, propagada. Logo, para ondas planas monocromáticas,

$$I = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2,$$

lembrando que $E_0 = |\vec{E}|_{\max}$.

Consideremos agora outra forma de escrever os campos, empregando números complexos com base na fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta;$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0) = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)}) \\ &= \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\phi_0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

Além de termos, assim, as dependências espacial e temporal separadas/fatoradas (o que é potencialmente interessante para o cálculo de valores médios), com a fase "inicial" também fatorada, podemos agora considerar uma amplitude complexa que incorpora esta fase inicial:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_0 e^{i\phi_0} = \underline{E_0} e^{i\phi_0} \hat{e} = \underline{E_0} \hat{e}, \quad (14)$$

onde $\hat{e}$ é o vetor na direção de oscilação do campo elétrico.

A amplitude complexa guarda, portanto, tanto o valor máximo E_0 do campo como sua fase inicial em $e^{i\phi_0}$.

Para o campo magnético temos, correspondentemente,

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{Re}(\vec{B}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}), \text{ com } \vec{B}_0 = \vec{B}_0 e^{i\phi_0} \\ &= \frac{1}{c} (\hat{k} \times \vec{E}_0) e^{i\phi_0} \\ &= \frac{E_0 e^{i\phi_0}}{c} (\hat{k} \times \hat{e}) \\ &= \frac{E_0}{c} (\hat{k} \times \hat{e}).\end{aligned}$$

Demostremos, a partir de agora,

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t}) \end{cases} \quad \text{e consideramos como ficam os valores m\u00e9dios em termos destes } \vec{E} \text{ e } \vec{B}, \text{ por exemplo}$$

$$\langle u \rangle = \langle 2\mu_E \rangle = \langle E_0 \vec{E}^2 \rangle = E_0 \langle \text{Re}(\vec{E} e^{-i\omega t})^2 \rangle$$

$$\text{e } \langle \vec{S} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \text{Re}(\vec{E} e^{-i\omega t}) \times \text{Re}(\vec{B} e^{-i\omega t}) \rangle,$$

enquanto em geral, para $a, b \in \mathbb{C}$: $\text{Re}(a) \cdot \text{Re}(b) \neq \text{Re}(a \cdot b)$.

O Exerc\u00edcio S-b \u00e9 dedicado a mostrar-n\u00e3o que os resultados s\u00e3o:

$$\langle u \rangle = \frac{E_0}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{E_0 E_0^2}{2} \quad (15)$$

$$\text{e } \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}^* = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \hat{k} = c \langle u \rangle \hat{k}, \quad (16)$$

de modo que a intensidade da radiação/luz monocromática é dada por:

$$I = c \langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2, \quad (17)$$

expressão que nos será útil posteriormente.

Rememindo:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}), \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E},$$

$$\vec{E}_0 = E_0 e^{i\phi_0} \hat{e},$$

$$|E_{\max}| = E_0 = \sqrt{E_0 \cdot E_0^*}$$

$$\vec{E}_0 = E_0 e^{i\phi_0}$$

amplitude complexa:
guarda informações
de amplitude e de
fase inicial!

amplitude de oscilação
do campo elétrico

$\hat{e} ? \dots$

IV) Polarização

Lembramos que, pelas equações de Maxwell para os campos de uma onda plana progressiva, as componentes E_x e B_y são vinculadas, bem como as componentes E_y e B_x , ao passo que E_x e E_y (e portanto B_y e B_x) são independentes.

Logo, temos dois conjuntos independentes de soluções para uma onda eletromagnética plana progressiva:

$$\text{I) } \vec{E}_x = E_x(z-ct) \hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{B}_y = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_x$$

1

$$\text{II) } \vec{E}_y = E_y(z-ct) \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{B}_x = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_y$$

Como basta $\vec{E}$ para descrever a onda, nos restringimos a tratar diste, cuja expressão geral no caso monocromático é então uma combinação linear das duas soluções acima, cada qual com sua amplitude e fase inicial:

$$\vec{E}_x(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\vec{E}_{0x} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \right), \quad \vec{E}_{0x} = E_{0x} e^{i\phi_x} \hat{x}$$

1

$$\vec{E}_y(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\vec{E}_{0y} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \right), \quad \vec{E}_{0y} = E_{0y} e^{i\phi_y} \hat{y},$$

sendo a solução geral dada, portanto, por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_x(\vec{r}, t) + \vec{E}_y(\vec{r}, t)$$

$$= \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \right),$$

onde a amplitude complexa agora é dada por:

$$\vec{E}_0 = E_{0x} e^{i\phi_x} \hat{x} + E_{0y} e^{i\phi_y} \hat{y}$$

$$= \left(E_{0x} \hat{x} + E_{0y} e^{i\delta} \hat{y} \right) e^{i\phi_x},$$

sendo $\delta = \phi_y - \phi_x$ e, assim:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[(\epsilon_{0x} \hat{x} + \epsilon_{0y} e^{i\delta} \hat{y}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\phi_x} e^{-i\omega t} \right].$$

Para simplificar, escolhemos $t=0$ tal que $\phi_x=0$ e

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \right)$$

$$= \epsilon_{0x} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{x} + \epsilon_{0y} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \hat{y},$$

escrevendo $\vec{E}_0 = \epsilon_{0x} \hat{x} + \epsilon_{0y} e^{i\delta} \hat{y}$ para alguns casos:

• $\delta = 0$: $\vec{E}_0 = \epsilon_{0x} \hat{x} + \epsilon_{0y} \hat{y} = \epsilon_{0x} \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \alpha \end{pmatrix}$: LP $_{\alpha}$

• $\delta = \pi$: $\vec{E}_0 = \epsilon_{0x} \hat{x} - \epsilon_{0y} \hat{y} = \epsilon_{0x} \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(-\alpha) \end{pmatrix}$: LP $_{-\alpha}$

• $\delta = +\frac{\pi}{2}$, $\epsilon_{0x} = \epsilon_{0y} = \epsilon_0$: $\vec{E}_0 = \epsilon_0 (\hat{x} + i\hat{y}) = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$: CP $_E$

• $\delta = -\frac{\pi}{2}$, $\epsilon_{0x} = \epsilon_{0y} = \epsilon_0$: $\vec{E}_0 = \epsilon_0 (\hat{x} - i\hat{y}) = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$: CP $_D$

• $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\epsilon_{0x} \neq \epsilon_{0y}$: $\vec{E}_0 = \epsilon_{0x} \hat{x} \pm i \epsilon_{0y} \hat{y} = \epsilon_{0x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \tan(\pm \alpha) \end{pmatrix}$: EP

• $\delta \neq \frac{n\pi}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) : : EP

onde temos os diferentes tipos de polarização da luz/radiação eletromagnética:

- Linear : fazendo ângulo $+\alpha$ ou $-\alpha$ com $\hat{x}$ (LP $_{\alpha}$ e LP $_{-\alpha}$ resp.).
- Circular : para a esquerda (anti-horário, CP $_E$) ou direita (horário, CP $_D$).
- Elíptica : caso geral, com determinados parâmetros (EP).

No caso da polarização elíptica, tem-se que a inclinação em relação a $\hat{x}$ e a excentricidade são dadas por

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arctg \left(\frac{2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \right)$$

$$e = \sqrt{1 - \cos^2 \epsilon}, \quad \epsilon = \frac{1}{2} \cdot \arccos \left(\frac{2 E_{0x} E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \right)^*$$

Mais interessante fisicamente, contudo, é analisar o papel da polarização em fenômenos ópticos, aos quais nos voltaremos dando preferência a nossos estudos analisando a propagação de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos.

* v. <http://elisecolin.medium.com/what-is-a-jones-vector-and-a-polarization-ellipse-f85f51e0b141>