Revisão de ondulatória

I) Movimento harmônico simples

Seja de forma exata ou como aproximação em algum domínio de validade/precisão, a equação diferencial

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad * \qquad (1)$$

descreve uma ampla diversidade de fenômenos físicos, a depender do que a variável x representa. Sua solução geral é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) \\ &= A \cdot \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \qquad {}^*(\text{ex. }1)^*$$

onde $A = |x_{max}|$ é a chamada amplitude da oscilação, φ é sua fase inicial, i.e. o argumento do cosseno em $t=0$, e o período de oscilação é dado pela periodicidade $\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$.

A expressão $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ permite associarmos o movimento harmônico simples ao movimento circular uniforme no qual $x(t)$ corresponde à projeção da posição $\vec{r}$ sobre a horizontal (eixo x), a qual por sua vez corresponde à parte real do número complexo**

$$z = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} \quad : \quad Re(z) = \frac{z + z^*}{2} = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = x(t).$$

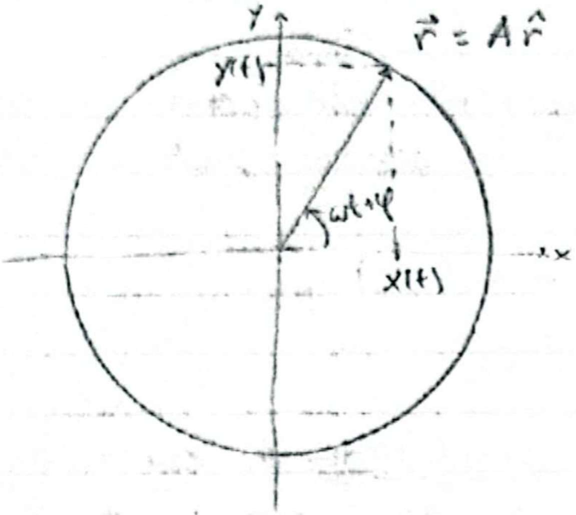
Conforme apontado pelo Exercício 1, a descrição dessa dinâmica oscilatória pode ser feita tanto com o cosseno como com o seno, de modo que não há nenhuma conotação especial, ou seque

* Empregamos a notação de um "$\cdot$" acima de uma dada função para representar cada derivada temporal sua. Desse modo, a equação (1) corresponde a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t) .$$

(ex 1) : V. Exercício 1.

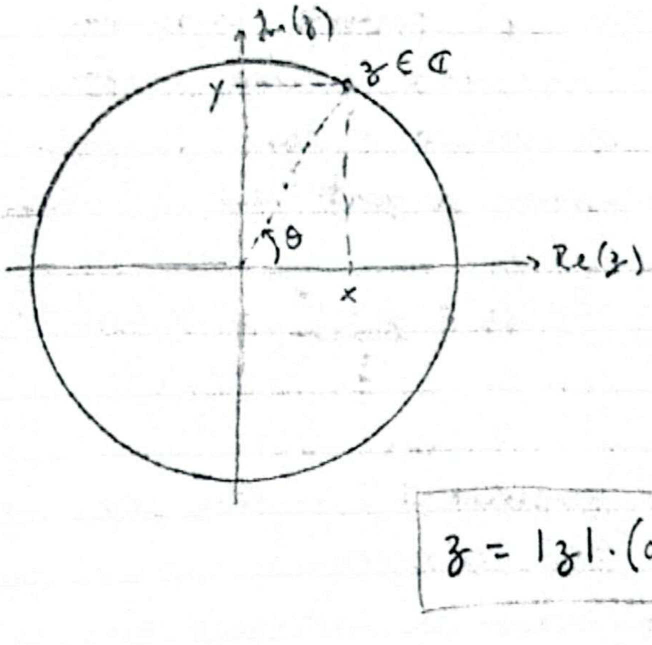
**



$$\vec{r} = A\hat{r} = A\left[\cos(\omega t+\varphi)\,\hat{i} + \operatorname{sen}(\omega t+\varphi)\,\hat{j}\right],$$

$$A = |\vec{r}|,\quad x(t=0) = A\cos\varphi,$$
$$y(t=0) = A\operatorname{sen}\varphi .$$

↳ Correspondência entre o plano xy ($\mathbb{R}^2$) e o plano complexo ($\mathbb{C}$):



$$z = Re(z) + i\cdot Im(z)$$
$$= x + iy ,$$

$$|z| = A = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} ,$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(Im(z)/Re(z)\right),$$

$$\boxed{z = |z|\cdot(\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta) = |z|\cdot e^{i\theta}} .$$

física, da parte real do número complexo: afinal, como mostrado no Exercício 1,

$$A\cos(\omega t+\varphi) = A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi+\pi/2)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right) = \mathrm{Im}\left(Ae^{i(\omega t+\varphi+\pi/2)}\right),$$

além de que a projeção de um MCU sobre qualquer direção descreve um MHS.

Portanto, a representação de um MHS pela parte real de um número complexo difere apenas de uma fase (de $\pi/2$) de uma representação pela parte imaginária, sendo tão arbitrária quanto a escolha de cosseno ou seno.

Com isto esclarecido, sigamos a convenção usual descrevendo um movimento oscilatório de frequência definida como

$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t+\varphi) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right], \quad (2)$$

adicionando que a correspondência com o movimento circular elucida os conceitos de frequência e frequência angular: a frequência angular ω, que multiplica t no argumento do cosseno (ou da exponencial), corresponde à velocidade angular do MCU, sendo medida (no SI) em rad/s, contabilizando portanto os ciclos em radianos, ao passo que a frequência ν contabiliza o número de ciclos por unidade de tempo, sendo medida (no SI) em $s^{-1} = Hz$ (Hertz). Com isso em mente, é natural então que

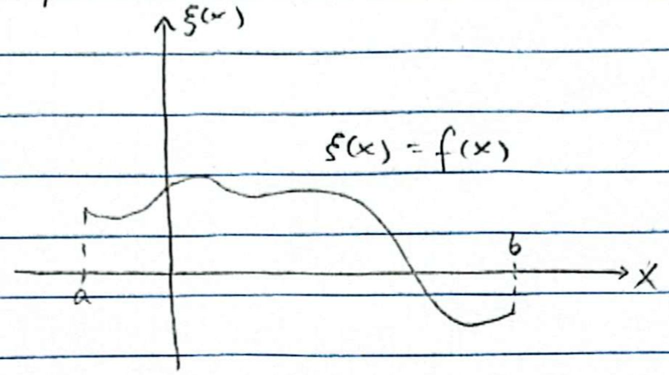
$$\boxed{1 \text{ ciclo} \equiv 2\pi \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi\cdot\nu}, \quad (3)$$

enquanto a duração por ciclo, i.e. o período T é naturalmente dado por

$$\boxed{\omega T = 2\pi, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{\nu}}. \quad (4)$$

II) Ondas: dinâmica em propagação

Consideremos uma função $f(x)$ que descreva a distribuição espacial de algum grau de liberdade (i.e. uma variável dinâmica) num dado instante de tempo:



onde $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. A partir de f podemos definir $\xi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\xi(x) = f(x+\delta)$$ ⤳ distribuição espacial transladada em δ p/ a esquerda.

ou

$$\xi(x) = f(x-\delta)$$ → distribuição espacial transladada em δ p/ a direita.

Se fizermos $\delta = vt$, com v constante, temos esta distribuição se transladando linearmente com o tempo: o padrão se propaga à velocidade v, de modo que agora temos

$$\xi(x,t) = f(x \pm vt) \tag{5}$$

→ propagação no sentido −

→ propagação no sentido +

e v é denominada <u>velocidade de fase</u> dessa propagação.

A princípio, qualquer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pode ter seu domínio estendido a uma função $f_P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periódica repetindo o padrão definido por f em $[a,b]$.

Pelo teorema de Fourier*, se uma função é periódica e contínua por partes então ela pode ser escrita como uma combinação linear de senos e cossenos:

$$f_P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos(nkx)+B_n\operatorname{sen}(nkx)\right], \qquad (6)$$

onde a necessidade da quantidade k se dá ao menos por razões dimensionais, conforme a natureza da grandeza x.

Com base no Exercício 1, podemos escrever a série de Fourier (6) também como:

$$f_P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cdot\cos(nkx+\varphi_n), \qquad (6')$$

ou mesmo

$$f_P(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{inkx}. \qquad (6'')$$

Sendo assim, qualquer $f(x)$ é uma combinação (discreta ou contínua*) linear de harmônicos, permitindo-nos assim nos restringir a estes e reconstruir, com o princípio de superposição, qualquer $f(x)$ que, em propagação, nos leva a tratar:

$$\xi(x,t)=\xi_0\cos k(x-vt)$$

$$=\xi_0\cdot\cos(kx-kvt).$$

Vejamos os significados das diversas grandezas associadas a essa dinâmica em propagação (i.e. onda).

* Tratamos aqui da série de Fourier, que de fato se aplica somente a funções periódicas. A rigor, uma $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ corresponde a uma $f_\infty: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f_\infty(x) = 0 \;\forall\; x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$.
Neste caso, f_∞ — e portanto f — ainda é uma combinação de harmônicos, porém num espectro contínuo e não mais discreto de frequências, que é a chamada transformada de Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \; c(\alpha)\, e^{i 2\pi \alpha x} .$$

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - kvt)$$

v é a velocidade de fase: velocidade com que cada fase (i.e. cada valor no argumento do cosseno) se propaga no espaço.

Para um dado x, tem-se a periodicidade temporal dada por:

$$\boxed{kvT = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{kv}}$$ é o

período da oscilação (temporal).

Já para um dado t, tem-se a periodicidade espacial dada por:

$$\boxed{k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}}$$ é o comprimento de onda,

i.e. o intervalo espacial em que o padrão se repete.

Assim, λ contabiliza a distância por ciclo, e temos agora um significado para a constante k — chamada número de onda:

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ contabiliza o número de comprimentos de onda compreendido no intervalo espacial de 2π unidades; medido no SI em rad/m, corresponde a em quantos radianos a fase "avança" a cada unidade de comprimento em propagação.

O número de onda conecta as dependências espacial e temporal:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{Tv} \Rightarrow \lambda = T \cdot v \qquad (7)$$

ao passo que $kv = \frac{2\pi}{T}$ contabiliza o avanço de fase a cada unidade de tempo decorrida, enquanto o inverso do período,

$$\nu := \frac{1}{T},$$

contabiliza o número de ciclos por unidade de tempo.

ν é a chamada frequência, e $\omega = 2\pi\nu$ é a frequência angular, cujos nomes se justificam por seus significados acima.

Desse modo, podemos escrever a onda harmônica como

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \tag{8}$$

$$= \xi_0 \cdot \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right), \tag{8'}$$

cuja velocidade de propagação é, por (7): $v = \lambda \cdot \nu$, equação esta cujo significado exploraremos a partir de alguns exemplos comuns.

- Ondas de pressão num gás: $v = \sqrt{\dfrac{\text{módulo de elasticidade volumétrica}}{\text{densidade de equilíbrio}}}$

- Ondas elásticas longitudinais numa barra sólida: $v = \sqrt{\dfrac{\text{módulo de elasticidade de Young}}{\text{densidade volumétrica}}}$

- Ondas transversais numa barra: $v = \sqrt{\dfrac{\text{módulo de cisalhamento}}{\text{densidade volumétrica}}}$

- Ondas transversais num fio : $v = \sqrt{\dfrac{\text{tensão no fio}}{\text{densidade linear}}}$.

$\therefore$ $\underline{v}$ depende das condições do meio de propagação (aquele que tem a dinâmica) ;

$\underline{\nu}$ em geral depende da perturbação nesse meio.

$\therefore$ $\lambda(v, \nu)$! $\rightsquigarrow$ $\boxed{\lambda = \dfrac{v}{\nu}}$. (9)

III) A equação de onda em duma e três dimensões

Em 1 dimensão, a equação de onda é a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 , \qquad (10)$$

cuja solução geral é dada por:

$$\xi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) ,$$

sendo portanto passível de descrição como uma combinação linear* de harmônicos da forma

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t) .$$

* Vale enfatizar que nós podemos aplicar o princípio de superposição porque a eq. de onda (10) é uma equação diferencial linear!

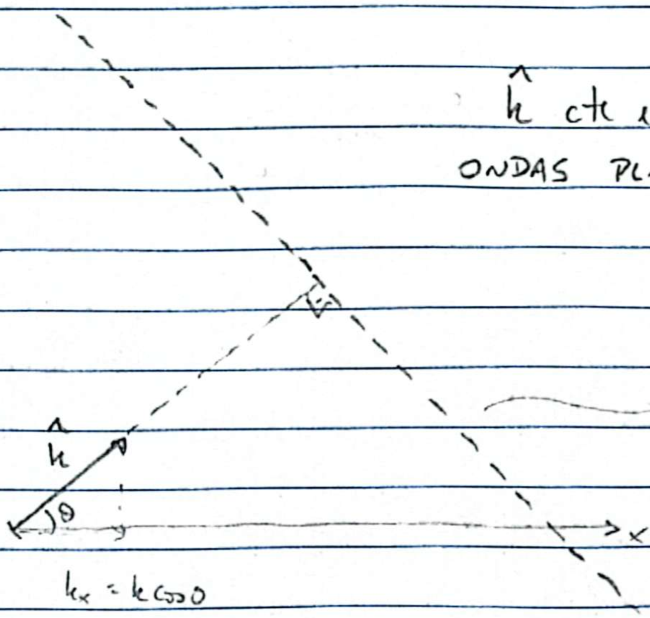
Em três dimensões, temos

$$kx \longmapsto \underbrace{k_x x + k_y y + k_z z = \vec{k}\cdot\vec{r}}_{\text{vetor de propagação}} = \underbrace{k}_{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\,\overset{\neq \hat{z}}{\hat{k}}\cdot\vec{r} = k \cdot r_k$$

vetor de propagação

k: quantos radianos de fase por unidade de distância r_k na direção de propagação $\hat{k}$

$\hat{k}$ cte e uniforme: ONDAS PLANAS!



Fase constante: $\phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ cte,

p/ dado t:

$$d\phi = \vec{k}\cdot d\vec{r} - \omega \cancel{dt}^{\,0}$$

$$\Rightarrow 0 = \vec{k}\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} \perp \hat{k}$$

∴ i.e. $\forall t$, constrói-se com $d\vec{r} \perp \hat{k}$ o lugar geométrico com a mesma fase: é a **frente de onda**!

$$k_x = k\cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda\cos\theta}}$$

∴ Fator $\cos\theta = \hat{k}\cdot\hat{x}$ menos radianos de fase por distância propagada, ou mais em distância p/ completar um dado avanço de fase (2π, p.ex.).

A velocidade de fase é obtida por:

$$d\phi = \vec{k} \cdot d\vec{r} - \omega dt = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{k} \cdot \vec{v} = k \cdot v_k = \omega$$

$$\Rightarrow v_k = \frac{\omega}{k},$$

Enquanto a equação de onda podemos obter partindo de um harmônico, com:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi \quad , \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi \quad \text{etc},$$

$$\Rightarrow -k^2 \xi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\xi$$

$$= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\xi$$

$$= (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\xi = \frac{k^2}{\omega^2}(-\omega^2 \xi)$$

$$= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0}.$$