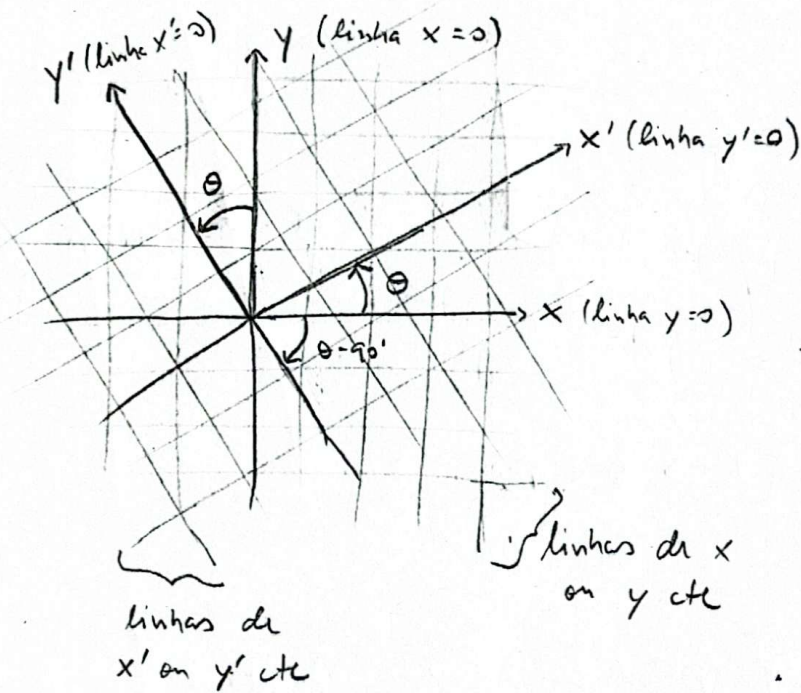


Um bom entendimento da estrutura do espaço-tempo e suas consequências pode ser trabalhado justamente a partir de uma perspectiva da transformação de Lorentz como uma espécie de "rotação" dos eixos espacial e temporal.

Vejamos como, retomando alguns aspectos de rotações espaciais:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

graficamente,
no plano xy (ou $x'y'$):



$$y' = cte :$$

$$-x \sin\theta + y \cos\theta = cte$$

$$\Rightarrow y = x \cdot \tan\theta + \frac{cte}{\cos\theta}$$

$$x' = cte :$$

$$x \cos\theta + y \sin\theta = cte$$

$$\Rightarrow y = -x \cot\theta + \frac{cte}{\sin\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ - \theta)}$$

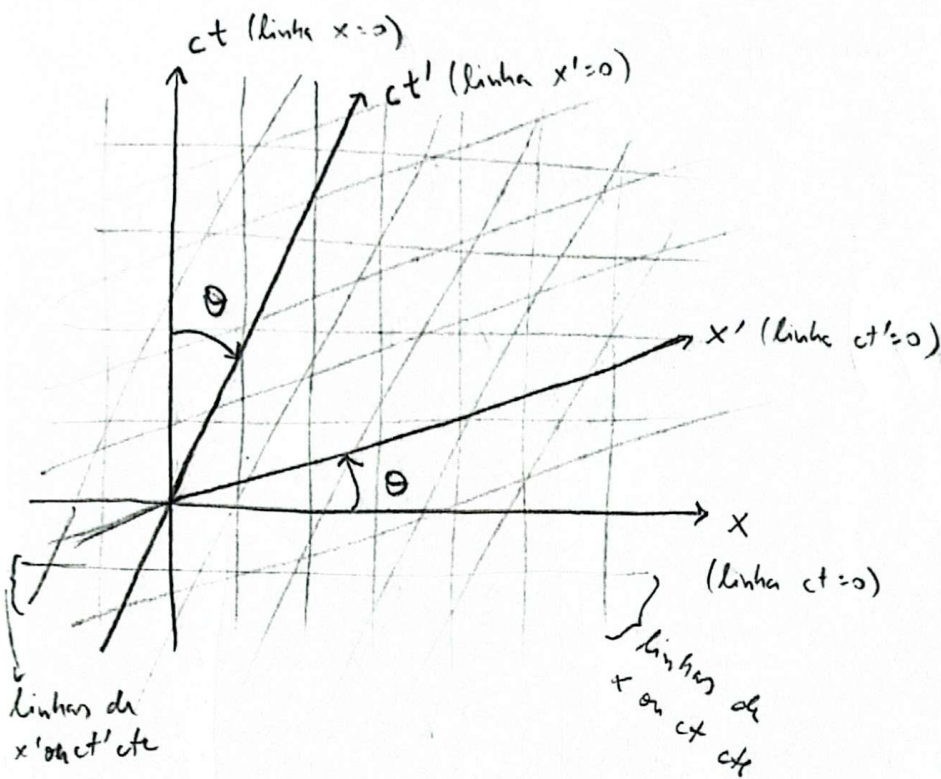
$$= \tan(90^\circ - \theta)$$

$$= -\tan(\theta - 90^\circ)$$

$$\therefore y = x \cdot \tan(\theta - 90^\circ) + \frac{cte}{\sin\theta}$$

Agora, para a transformação ("boost") de Lorentz:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$



$$\theta = \arctan \beta$$

$$(\beta = \tan \theta)$$

$$\hookrightarrow \forall v < c : \beta < 1 \Rightarrow \theta < 45^\circ$$

$$ct' = cte :$$

$$\gamma(-\beta x + ct) = cte$$

$$\Rightarrow -\beta x + ct = \frac{cte}{\gamma}$$

$$\Rightarrow ct = \beta x + \frac{cte}{\gamma}$$

$$x' = cte :$$

$$\gamma(x - \beta ct) = cte$$

$$\Rightarrow x - \beta ct = \frac{cte}{\gamma}$$

$$\Rightarrow ct = x \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{cte}{\beta\gamma}$$

$$\frac{1}{\beta} = \tan \alpha = \frac{1}{\tan \theta}$$

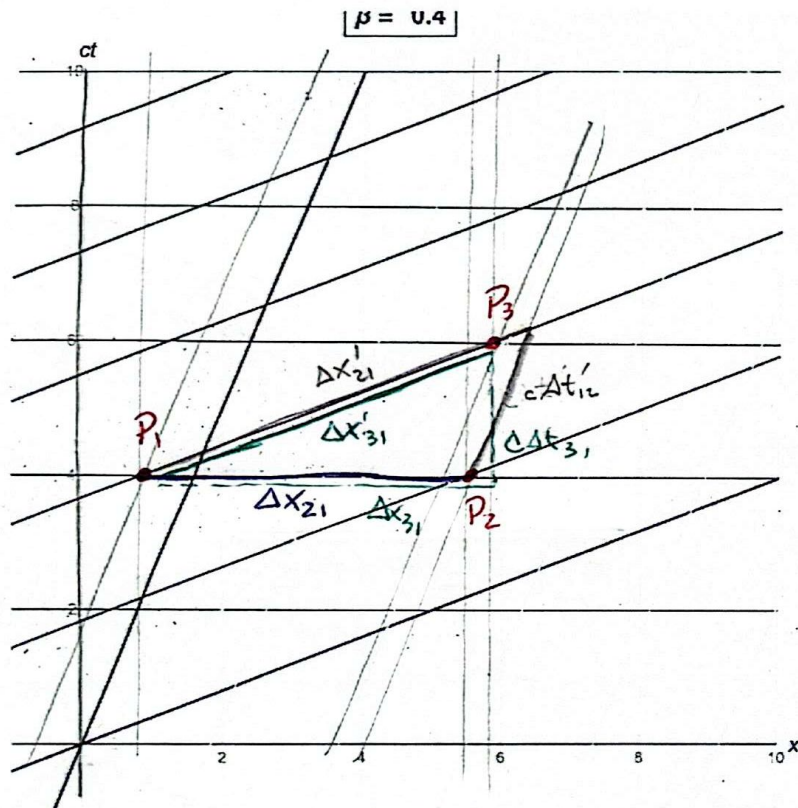
$$= \tan(90^\circ - \theta)$$

$$\therefore ct = x \cdot \tan(90^\circ - \theta) - \frac{cte}{\beta\gamma}$$

Vamos então explorar as propriedades desta estrutura do espaço-tempo...

Simultaneidade:

Eventos simultâneos em S não o serão em S', e vice-versa.



$$\begin{aligned} * 1 + \beta^2 \gamma^2 &= 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \\ &= \frac{1 - \beta^2 + \beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \end{aligned}$$

Relatividade especial

↳ P1 simultâneo a P2 em S:

$$\begin{aligned} c \Delta t'_{12} &= \gamma (\Delta t_{12} - \beta \Delta x_{12}) = -\beta \gamma \Delta x_{12} \\ &= -\beta \gamma^2 (\Delta x_{12} + \beta c \Delta t_{12}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c \Delta t'_{12} (1 + \beta^2 \gamma^2) = -\beta \gamma^2 \Delta x'_{12}$$

$$\Rightarrow^* \Delta t'_{12} = -\frac{v}{c^2} \Delta x'_{12} = \frac{v}{c^2} \Delta x'_{21}$$

P1 simultâneo a P3 em S':

$$\begin{aligned} c \Delta t_{31} &= \gamma (c \Delta t'_{31} + \beta \Delta x'_{31}) = \beta \gamma \Delta x'_{31} \\ &= \beta \gamma^2 (\Delta x_{31} - \beta c \Delta t_{31}) \end{aligned}$$

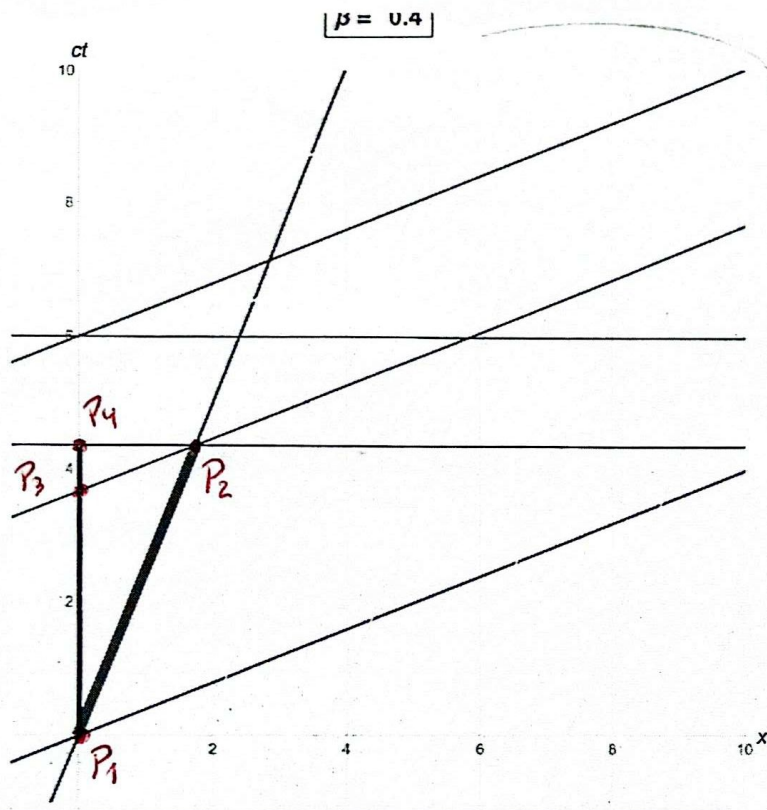
$$\Rightarrow c \Delta t_{31} (1 + \beta^2 \gamma^2) = \beta \gamma^2 \Delta x_{31}$$

$$\Rightarrow^* \Delta t_{31} = \frac{v}{c^2} \Delta x_{31}$$

112

Tempo próprio:

Intervalo de tempo entre dois eventos segundo referencial no qual estes eventos ocorrem num mesmo local.



$$\beta = 0.4 \Rightarrow \gamma = 1.09 \approx 1.1$$

Relatividade especial

$$\Delta t_{\text{próprio}} = \Delta t'_{21}$$

$$c\Delta t_{21} = \gamma (c\Delta t'_{21} + \beta \Delta x'_{21})$$

$$= \gamma (c\Delta t'_{21} + 0)$$

pois $\Delta t'_{21}$ próprio

$$c\Delta t'_{21} = 4$$

$$c\Delta t_{21} = c\Delta t_{41} > 4$$

$$c\Delta t_{21} = 4\gamma$$

$$\approx 4.4$$

$$\Rightarrow c\Delta t_{21} = \gamma c\Delta t'_{21}$$

113

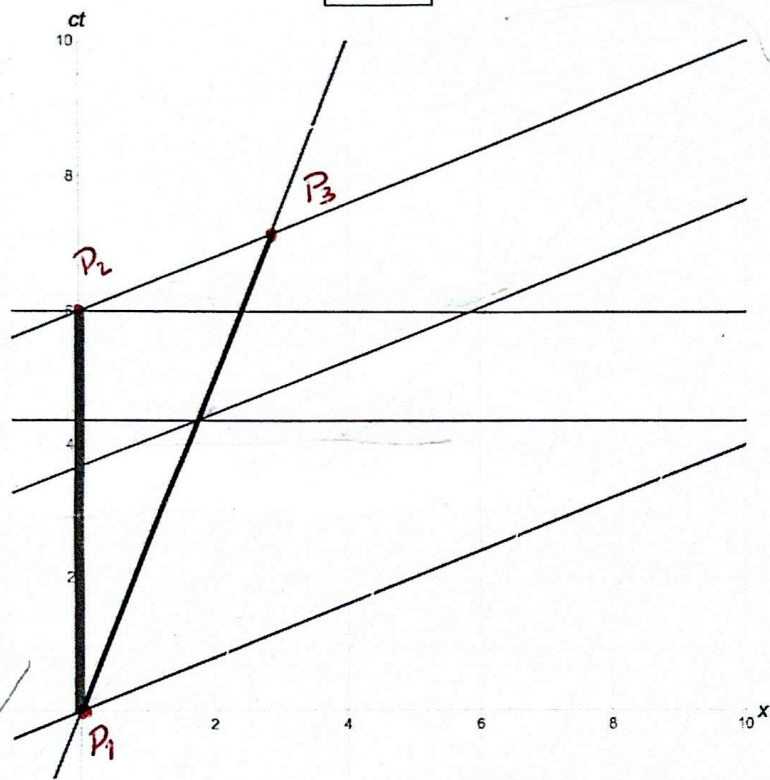
Tempo próprio:

Intervalo de tempo entre dois eventos segundo referencial no qual estes eventos ocorrem num mesmo local.

Dilatação temporal:

$$\Delta t_{\text{outro}} = \gamma \Delta t_{\text{próprio}}$$

$$\beta = 0.4$$



Relatividade especial

$$\Delta t_{\text{próprio}} = \Delta t_{21}$$

$$c\Delta t'_{21} = \gamma(c\Delta t_{21} - \beta\Delta x_{21})$$

$$= \gamma(c\Delta t_{21} - 0)$$

pois Δx_{21} próprio

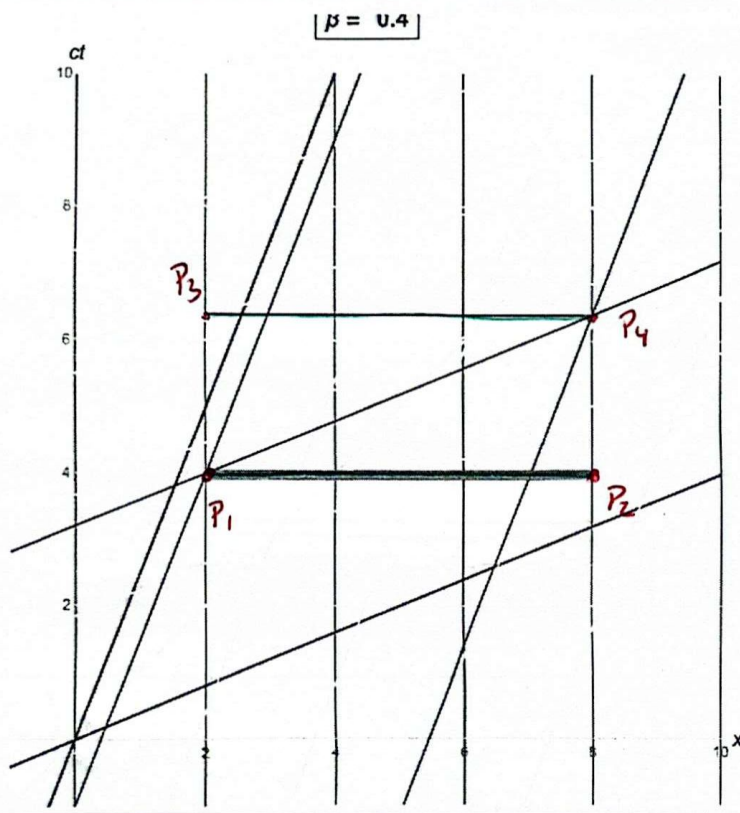
$$c\Delta t_{21} = 6$$

$$c\Delta t'_{21} = c\Delta t'_{31} > 6$$

$$\Delta t'_{21} = 6\gamma \approx 6.6$$

$$\Rightarrow c\Delta t'_{21} = \gamma c\Delta t_{21}$$

114

Comprimentopróprio:Intervalo espacial medido
no referencial de repouso

Relatividade especial

$$\begin{aligned} L_{\text{próprio}} &= \Delta x_{21} \\ &= \Delta x_{43}, \end{aligned}$$

$$\text{pois } c\Delta t_{21} = 0 = c\Delta t_{43}.$$

$\Delta x' = ?$ para dados $\Delta x_{\text{próprio}}$,
mas com $\Delta t' = 0$.



$$\begin{aligned} L &= \Delta x'_{41} \\ &= \gamma (\Delta x_{41} - \beta c \Delta t_{41}) \\ &= \gamma \cdot \Delta x_{41} - \beta \gamma c \Delta t_{41} \\ &= \gamma \cdot \Delta x_{21} - \beta \gamma^2 (c \Delta t'_{41} + \beta \Delta x'_{41}) \\ &= \gamma \cdot L_{\text{próprio}} - \beta \gamma^2 (0 + \beta L) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L \underbrace{(1 + \beta^2 \gamma^2)}_{= \gamma^2} = \gamma L_{\text{próprio}}$$

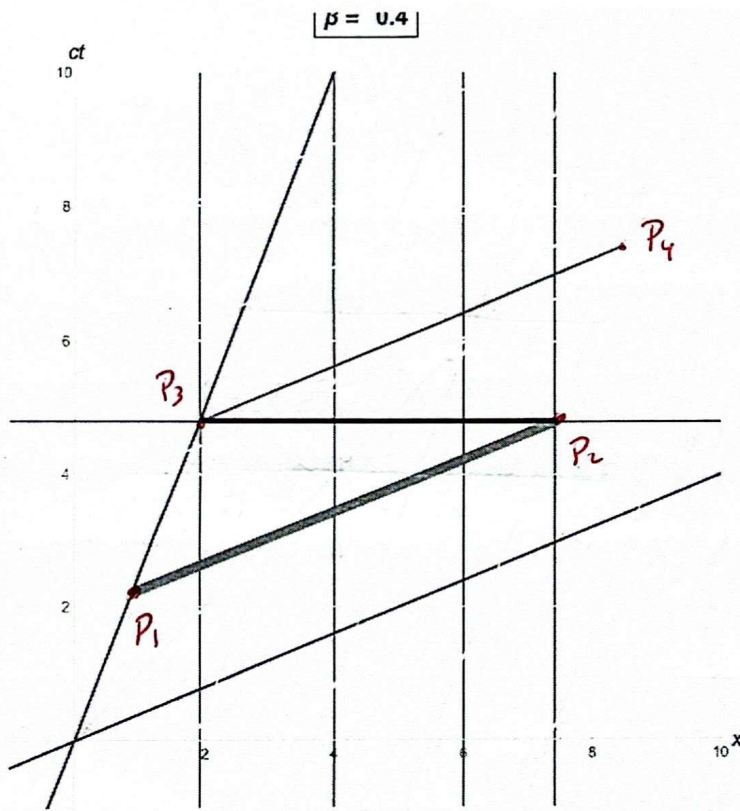
$$\Rightarrow L = \frac{L_{\text{próprio}}}{\gamma}$$

115

Comprimentopróprio:Intervalo espacial medido
no referencial de repousoContração espacial:

$$L_{\text{outro}} = \frac{L_{\text{próprio}}}{\gamma}$$

Relatividade especial



$\Rightarrow \Delta x = ?$ para dados $\Delta x'_{\text{próprio}}$,
mas com $\Delta t = 0$.

$$\begin{aligned} L &= \Delta x_{23} \\ &= \gamma (\Delta x'_{23} + \beta c \Delta t'_{23}) \\ &= \gamma \Delta x'_{23} + \beta \gamma c \Delta t'_{23} \\ &= \gamma \cdot \Delta x'_{21} + \beta \gamma^2 (c \Delta t_{23} - \beta \Delta x_{23}) \\ &= \gamma L_{\text{próprio}} + \beta \gamma^2 (0 - \beta L) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L (1 + \beta^2 \gamma^2) = \gamma L_{\text{próprio}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{L_{\text{próprio}}}{\gamma}$$

$$\hookrightarrow L_{\text{próprio}} = \Delta x'_{21}$$

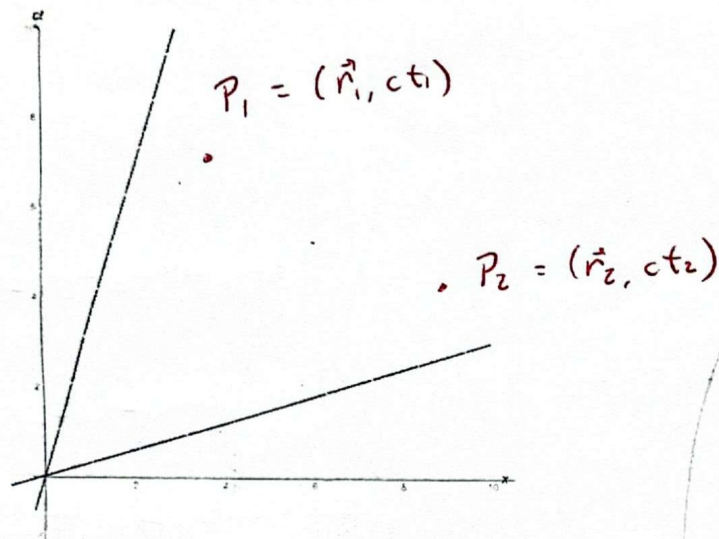
$$= \Delta x'_{43}$$

$$\text{pois } c \Delta t'_{21} = 0 = c \Delta t'_{43}.$$

Espaço-tempo de Minkowski:

- Algo, além da trajetória ("linha de mundo") da luz, é invariante sob transformações de Lorentz?

→ "produto interno"



$$\langle (\vec{r}_1, ct_1), (\vec{r}_2, ct_2) \rangle = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 - c^2 t_1 t_2$$

↓
produto escalar usual

Relatividade especial

→ Lembrando do ponto de partida na obtenção das transformações de Lorentz, com a combinação $x^2 - c^2 t^2$, vejamos como esta se comporta sob tais transformações, observando primeiramente que podemos escrevê-la matricialmente como

$$x^2 - c^2 t^2 = (x \ ct) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$, então:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = (x' \ ct') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

$$= (x \ ct) L^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix},$$

onde

$$L^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ -\beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & \gamma^2(-\beta+\beta) \\ \gamma^2(-\beta+\beta) & \gamma^2(\beta^2-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Logo $x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$!

Com um produto interno define-se assim a norma (i.e. o "tamanho invariante") de eventos — e de intervalos no espaço-tempo — com uma estrutura algébrica e geométrica chamados então de Espaço-tempo de Minkowski.

Esta norma é especialmente interessante para intervalos entre eventos, p.ex.:

$$\begin{aligned} \|P_1 - P_2\| &= \|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, c(t_1 - t_2))\| \\ &= \langle (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, c(t_1 - t_2)), (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, c(t_1 - t_2)) \rangle \\ &= \Delta \vec{r}^2 - c^2 \Delta t^2, \end{aligned}$$

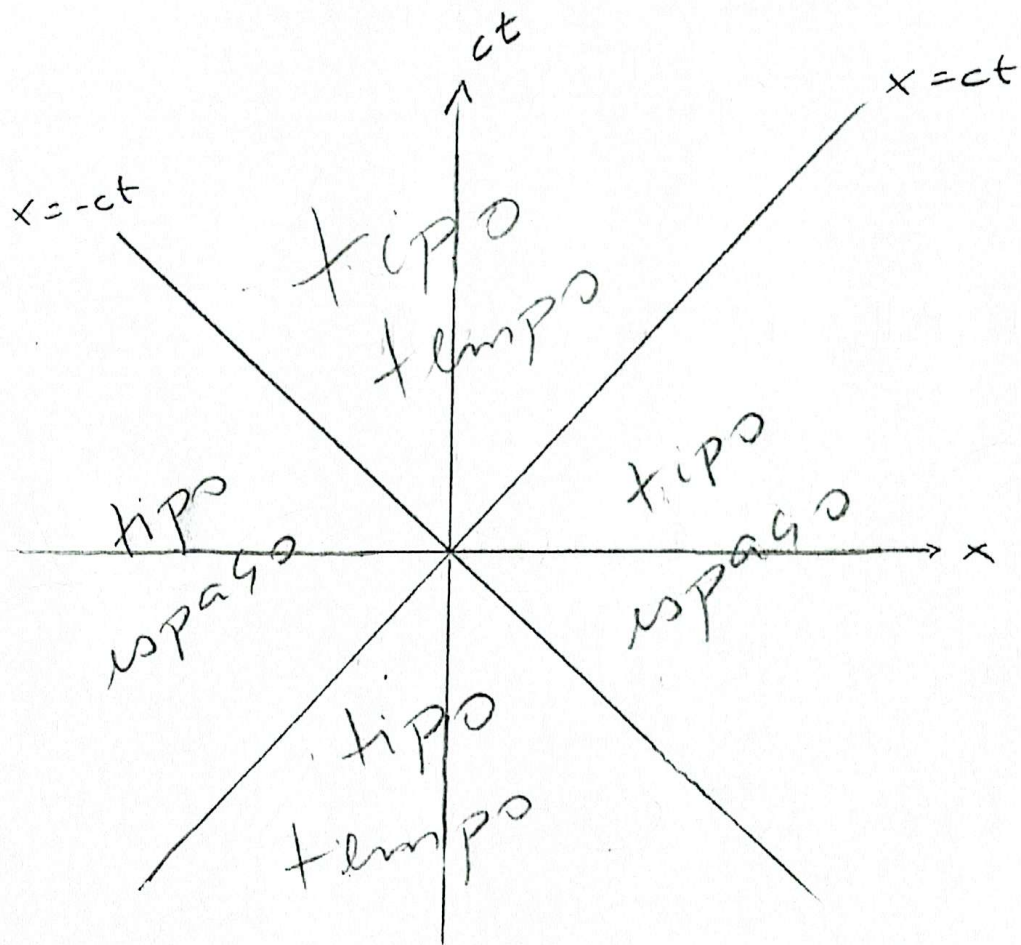
sendo comum a notação

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2.$$

OBS: A convenção de sinal varia entre autores, sendo também (e até mais) comum a definição do intervalo invariante como $\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$.

Seguiremos, ao menos por ora, com a que introduzimos acima.

O intervalo invariante Δs^2 define assim uma "distância" entre eventos no espaço-tempo, e tem interpretação significativa nos diagramas de espaço-tempo:



• $\Delta s^2 = 0 : \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta x = \pm c \Delta t$: intervalos correspondentes à trajetória da luz no vácuo:

CONE DE LUZ!

INTERVALO
NULO

• $\Delta S^2 < 0 : \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 < 0$

INTERVALO
TIPO TEMPO
(TIMELIKE)

$$\Rightarrow |\Delta x| < c |\Delta t| \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| < c$$

região interior
ao cone de luz.

Além disso, para intervalos "timelike" é possível encontrar um referencial para o qual $\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = -c^2 \Delta \tau^2$, isto é: um referencial para o qual $\left| \frac{\Delta S}{c} \right| = \Delta \tau$ é um tempo próprio (museu-n revisitar os diagramas das páginas 12 e 13).

• $\Delta S^2 > 0 : \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 > 0$

INTERVALO
TIPO ESPAÇO
(SPACELIKE)

$$\Rightarrow |\Delta x| > c |\Delta t| \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| > c$$

região exterior ao
cone de luz.

Para intervalos "spacelike", é possível encontrar um referencial para o qual $\Delta S^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x_0^2$, isto é: um referencial para o qual $|\Delta S| = \Delta x_0$ é um comprimento próprio (museu-n revisitar os diagramas das páginas 14 e 15).

Ademais, todo intervalo invariante entre eventos simultâneos num um intervalo "spacelike" (museu-n revisitar o diagrama da página 11).

* Causalidade :

Sejam os eventos CAUSA : (x_1, t_1)

1 EFEITO : (x_2, t_2) .

processo / fenômeno
causal com
velocidade

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

→ Como diferentes referenciais observam estes eventos?

↳ pelas transformações de Lorentz :

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ &= \gamma c\Delta t \left(1 - \beta v/c\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \gamma \left(1 - \frac{\beta v}{c}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta t'}{\Delta t} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{\beta v}{c} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{v \cdot v}{c^2} < 1$$

$$\begin{aligned} c\Delta t &= \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x) \\ &= \gamma c\Delta t' \left(1 + \beta v/c\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \gamma \left(1 + \frac{\beta v}{c}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta t}{\Delta t'} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{\beta v}{c} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{v \cdot v}{c^2} > -1$$

$\therefore \Delta t$ e $\Delta t'$ tem o mesmo sinal (i.e. a ordem temporal entre eventos na mesma) implica que

$$\underline{\underline{|v \cdot v| < c^2}}$$

Logo, se $|v| > c$ haverá algum referencial para o qual

$|v \cdot v| > c^2$, consequentemente haverá algum referencial no qual

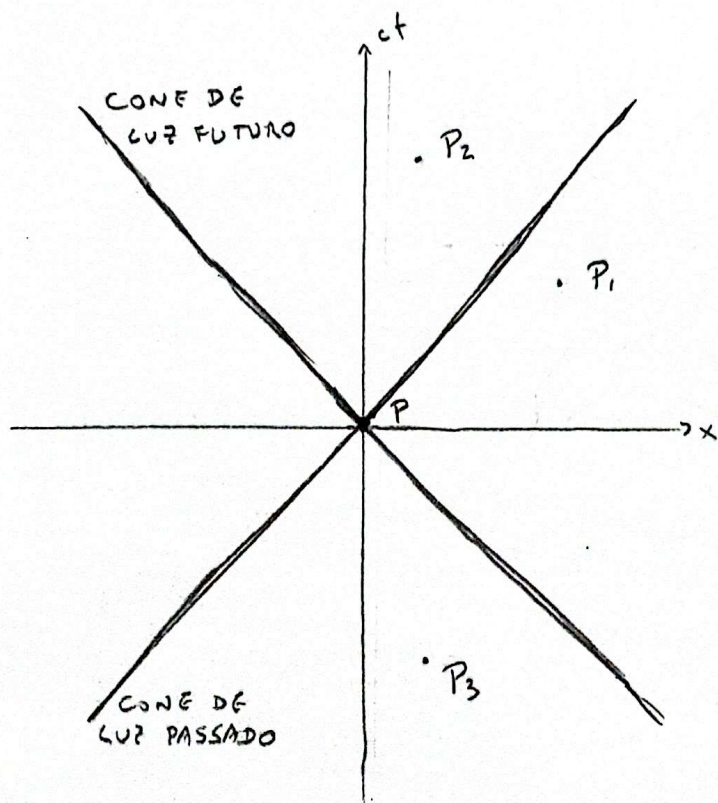
ex.:
 $v = 1,1c$
 $c = 0,95c$
 $\downarrow$
 $v \cdot v = 1,045c^2$

o efeito preceder a causa. Como $|v| = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|$,

concluímos portanto que intervalos tipo espaço não podem conectar eventos causalmente relacionados. Em outras palavras, eventos com relação causal não podem ser conectados por intervalos tipo tempo.

Por conseguinte, nenhum processo ou fenômeno tem trajetória tipo espaço — i.e. com $v > c$. Daí, assim, a condição da velocidade da luz no vácuo como um limite superior de velocidades.

Retomando o cone de luz, com origem num dado evento de interesse P . Pontos P_1 fora do cone de luz não podem ter relação



causal com P , e a ordem temporal entre eles depende do referencial.

Por pontos P_2 dentro do cone de luz na região $t > t_P$ são eventos posteriores a P em qualquer referencial e podem ser efeitos de P .

Por fim, pontos P_3 dentro do cone de luz na região $t < t_P$ são eventos anteriores a P em qualquer referencial e podem ser causa de P .