

Interferência: experimento de Young (fenda dupla)

linearidade da eq. de onda $\Rightarrow$ princípio de superposição
 aplicável / válido!

$$\oplus \begin{cases} \vec{E}_1 = E_{01} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t)} \hat{e}_1 & , E_{01} = E_0 e^{i\varphi_1} \\ \vec{E}_2 = E_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t)} \hat{e}_2 & , E_{02} = E_0 e^{i\varphi_2} \end{cases}$$

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \stackrel{H1}{=} (E_{01} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} \hat{e}_1 + E_{02} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} \hat{e}_2) e^{-i\omega t} \Rightarrow \langle \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rangle = \vec{0}$$

enquanto $I = \langle S \rangle = \frac{\epsilon}{2} v |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon}{2} v \vec{E} \cdot \vec{E}^*$

$$\begin{aligned} & (E_{01} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} \hat{e}_1 + E_{02} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} \hat{e}_2) \cdot (E_{01}^* e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} \hat{e}_1 + E_{02}^* e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} \hat{e}_2) \\ &= |E_{01}|^2 + |E_{02}|^2 + (E_{01} E_{02}^* e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2)} + E_{01}^* E_{02} e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2)}) \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \\ &= |E_{01}|^2 + |E_{02}|^2 + |E_{01}| \cdot |E_{02}| \cdot 2 \cdot \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \varphi_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \varphi_2) \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \Delta \cdot \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2$$

Δ : diferença de fase no ponto em questão
 $= (\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \varphi_1) - (\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_2)$

$\therefore$ $\left. \begin{array}{l} \text{interferência} \neq \text{superposição!} \\ \text{termo de interferência} \end{array} \right\}$
 $\hookrightarrow$ construtiva $\times$ destrutiva
 $\hookrightarrow \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$: ondas não interferem!

11'

Hipóteses impugadas (em algum momento) :

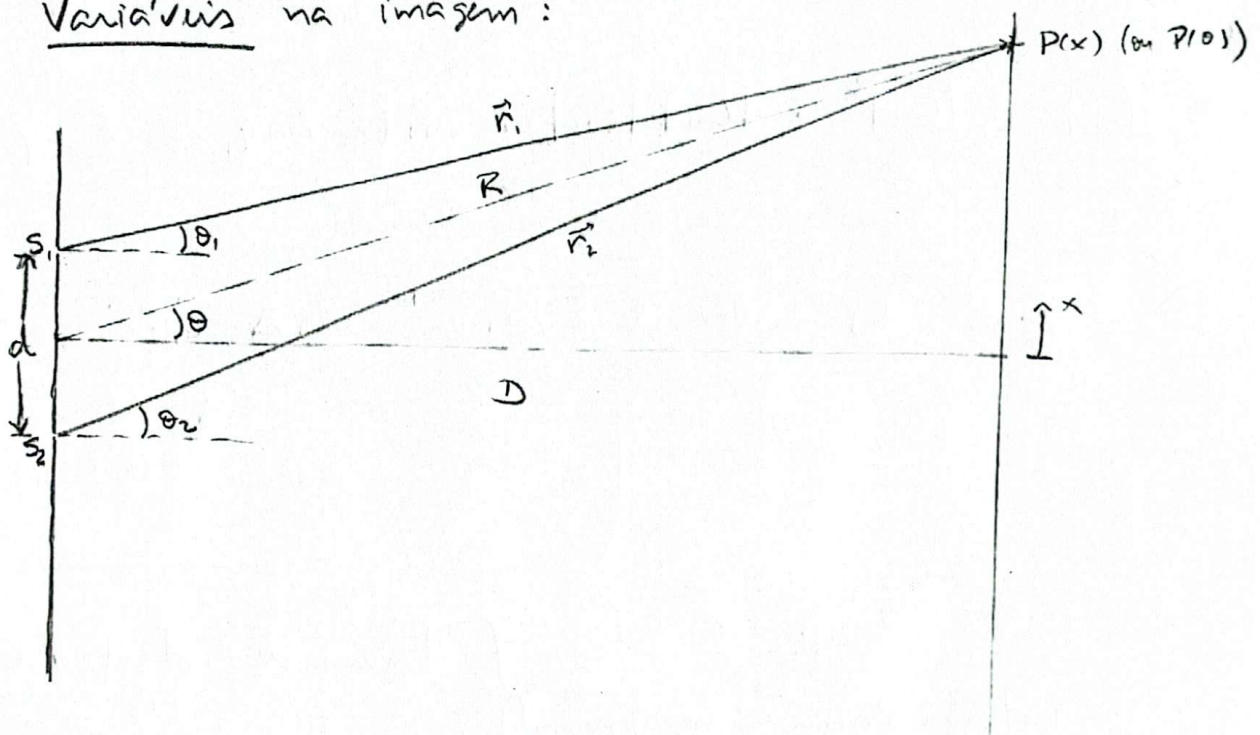
H1) Fontes de mesma frequência : $\omega_1 = \omega_2$

H2) Mesma fase nas fontes : $\varphi_1 = \varphi_2$: "coerência"

H3) Mesma polarização : $\hat{e}_1 = \hat{e}_2$

H4) Distância entre as fontes muito menor que a distância entre fontes e anteparo : $d \ll D$: "far-field"

Variaáveis na imagem :



Na diferença de fase $\Delta = (\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \varphi_1) - (\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_2)$, tem-se:

$$\vec{\delta} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{S_2 S_1} \quad (\text{diferença de caminhos}),$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{x}{D}\right) = \arcsen\left(\frac{R}{D}\right),$$

$$\hat{k}_1 = \hat{r}_1 \Rightarrow \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 = k_1 r_1, \quad \hat{k}_2 = \hat{r}_2 \Rightarrow \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 = k_2 r_2,$$

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{x - d/2}{D}\right), \quad \theta_2 = \arctg\left(\frac{x + d/2}{D}\right).$$

Logo:

$$\Delta = (k_1 r_1 + \varphi_1) - (k_2 r_2 + \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ &= \frac{2\pi\nu}{v} \\ &= \frac{\omega}{v} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{H1}} \quad \Delta = \underbrace{k(r_1 - r_2)}_{\substack{\text{defasagem decorrente} \\ \text{da diferença de} \\ \text{caminhos entre cada fenda} \\ \text{e o ponto de observação P.}}} + \underbrace{(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\text{defasagem nas fendas } S_1 \text{ e } S_2}$$

$$\xrightarrow{\text{H2}} \quad \Delta = k(r_1 - r_2)$$

No experimento de Young (1801), esta condição é cumprida por meio de uma fenda prévia entre a fonte de luz e as duas fendas S_1 e S_2 .

Nesse caso,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(k(r_1 - r_2)) \hat{E}_1 \cdot \hat{E}_2$$

$$\xrightarrow{\text{H3}} \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(r_2 - r_1)) \quad \text{para mesma polarização.}$$

Quanto à diferença de caminhos $r_2 - r_1$:

$$r_1 = \frac{D}{\cos \theta_1} = \frac{D}{\cos [\arctg(\frac{x-d/2}{D})]}$$

$$r_2 = \frac{D}{\cos \theta_2} = \frac{D}{\cos [\arctg(\frac{x+d/2}{D})]}$$

fazendo $\cos(\arctg(y)) = \cos \alpha$,

$$\arctg(y) = \alpha \Rightarrow y = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow y^2 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow (y^2 + 1) \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$\therefore \cos(\arctg(y)) = (y^2 + 1)^{-1/2},$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = D \cdot \left[\left(\frac{x}{D} \mp \frac{d}{2D} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}.$$

com a expansão

$$\sqrt{(x+b)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x \cdot b}{\sqrt{x^2 + 1}} + O(b^2),$$

temos então:

$$\begin{aligned}
 n_2 - n_1 &= D \left[\sqrt{\left(\frac{x}{D}\right)^2 + 1} + \frac{x}{D} \cdot \frac{(+d/2D)}{\sqrt{(x/D)^2 + 1}} + O\left(\left(\frac{d}{2D}\right)^2\right) \right] \\
 &\quad - D \left[\sqrt{\left(\frac{x}{D}\right)^2 + 1} + \frac{x}{D} \cdot \frac{(-d/2D)}{\sqrt{(x/D)^2 + 1}} + O\left(\left(\frac{d}{2D}\right)^2\right) \right] \\
 &= D \cdot 2 \cdot \frac{x}{D} \cdot \frac{d}{2D} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{D}\right)^2 + 1}} + O\left(\left(\frac{d}{2D}\right)^2\right),
 \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{D}\right)^2 + 1}} = \cos(\arctg(x/D)) = \cos\theta$.

$$\therefore n_2 - n_1 \stackrel{H4}{=} x \cdot \frac{d}{D} \cdot \cos\theta + O\left(\left(\frac{d}{2D}\right)^2\right),$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow k(n_2 - n_1) &\stackrel{H4}{=} k \cdot d \cdot \frac{x}{D} \cdot \cos\theta \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot \cos\theta \\
 &= 2\pi \cdot \underbrace{\frac{d \cdot \sin\theta}{\lambda}} !
 \end{aligned}$$

A diferença de fase $k(n_2 - n_1)$, decorrente da diferença de caminhos $n_2 - n_1$, depende da relação entre as escalas de d e de λ !

∴

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda}\right).$$

Para $I_1 = I_2 \equiv I_0$ (caso do experimento de Young), tem-se

$$\begin{aligned} I(\theta) &= 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda}\right) \right] \\ &= 4I_0 \cdot \cos^2\left(\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2\beta &= 1 + \cos \beta \cos \beta - \sin \beta \sin \beta \\ &= 2 \cos^2 \beta \end{aligned}$$

que oscila portanto entre $4I_0$ e 0, com extremos em:

$$\begin{cases} \text{Máximos: } d \sin \theta = n \cdot \lambda, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \text{Mínimos: } d \sin \theta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

correspondendo às chamadas interferências construtiva e destrutiva, respectivamente, sendo pertinente observar que $\frac{d \sin \theta}{\lambda}$ é a diferença de caminho em unidades do comprimento de onda em questão!

O espaçamento (angular θ , ou x no anteparo) entre máximos ou mínimos consecutivos é dado por:

$$\frac{d}{\lambda} \cdot \Delta(\sin\theta) = 1 \Rightarrow \boxed{\Delta(\sin\theta) = \frac{\lambda}{d}}$$

Para pequenos ângulos, $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$

$$\therefore \Delta\theta = \frac{\lambda}{d}.$$

Em termos de $x = D \cdot \tan\theta$:

$$\Delta x = D \cdot \Delta(\tan\theta)$$

$$= D \cdot \Delta(\theta + \mathcal{O}(\theta^3))$$

$$\approx D \cdot \Delta\theta \text{ para pequenos ângulos.}$$

Consideremos agora que as amplitudes E_0 e E_0 dependam de r_1 e r_2 ; para ondas esféricas, $E_0 \mapsto \frac{E_0}{r}$ e, para ondas cilíndricas, $E_0 \mapsto \frac{E_0}{\sqrt{r}}$.

Assim, para cada $i = 1, 2$: $\frac{E_{0i}}{r_i}$ ou $\frac{E_{0i}}{\sqrt{r_i}}$,

$$\text{onde } \frac{1}{r_i^a} = \frac{1}{R} \left(1 - a \cdot \frac{d}{2D} \cdot \frac{x/D}{(x/D)^2 + 1} + \dots \right) \\ = \frac{1}{R^a} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{d}{2D}\right) \right),$$

de modo que podemos aproximar, sob a hipótese H4, considerar as amplitudes como $\frac{E_{0i}}{R}$, ou $\frac{E_{0i}}{\sqrt{R}}$, para ambos $i = 1, 2$.

Assim, temos

$$I(\theta) = I_1(\theta) + I_2(\theta) + 2 \sqrt{I_1(\theta) \cdot I_2(\theta)} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda}\right)$$

que, para $E_{01} = E_{02}$, torna-se

$$I(\theta) = 4 I_0(\theta) \cdot \cos^2\left(\pi \cdot \frac{d \sin \theta}{\lambda}\right)$$

$$\text{com } \frac{I_0(\theta)}{I_0(0)} = \begin{cases} \frac{1/R}{1/D} = \frac{D}{R} = \cos \theta, & \text{para ondas cilíndricas} \\ \frac{1/R^2}{1/D^2} = \left(\frac{D}{R}\right)^2 = \cos^2 \theta, & \text{para ondas esféricas} \end{cases}.$$

Considerando ondas cilíndricas para duas fendas (não "buracos"),
temos então para o experimento de Young:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos\theta \cdot \cos^2\left(\pi \cdot \frac{d \sin\theta}{\lambda}\right)$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{I(x)}{I(0)} = \frac{D}{\sqrt{x^2 + D^2}} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \frac{x}{\sqrt{x^2 + D^2}}\right).$$

Para pequenos ângulos, $\cos\theta = 1 + \mathcal{O}(\theta^2)$ e $\frac{1}{\sqrt{x^2 + D^2}} \rightarrow \frac{1}{D}$,

recuperando-se o padrão de amplitude máxima $4I_0$ independente de θ (ou x). Para pequenos ângulos, temos também $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3)$ e máximos igualmente espaçados em θ ; fora desta aproximação, a distância entre máximos aumenta, uma vez que, quanto maior θ (no primeiro quadrante), maior é $\Delta\theta$ para um dado $\Delta(\sin\theta)$ — ou, correspondentemente, a variação de $\tan\theta$ para dada variação de $\sin\theta$ é maior quanto maior o ângulo θ .

Se pode-se ver isto com o gráfico de $\tan\theta(\sin\theta) \leftrightarrow f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

lembrando que $\Delta x = D \cdot \Delta(\tan\theta)$.