

* Dinâmica relativística

Com a estrutura do espaço-tempo dada pelo espaço vetorial quadridimensional munido do produto interno que define o intervalo invariante

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

temos a posição no espaço-tempo dada por

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) := (ct, x, y, z),$$

i.e. $x = (ct, \vec{r})$, com $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = c^2 t^2 - \vec{r}^2 = s^2$,

OBS: Trocamos, a partir de então, os sinais no produto interno; os significados das regiões tipo tempo e tipo espaço se mantêm, trocando-se apenas os sinais de ds^2 a elas associados.

Para definir as variáveis da mecânica relativística, precisamos de uma derivada temporal bem-definida, independente do referencial. Como a trajetória espaço-temporal ("linha de mundo") de qualquer partícula é composta de intervalos tipo tempo, com $ds^2 > 0$, tem-se $ds^2 = c^2 d\tau^2$, onde τ é o tempo próprio, univocamente definido por $d\tau = \frac{|ds|}{c}$. Assim:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

$$= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right)$$

$$= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right)$$

$$= \frac{c^2}{\gamma^2} dt^2, \text{ onde } \gamma \text{ agora se refere à partícula cuja dinâmica se pretende descrever.}$$

$$\therefore dt = \gamma d\tau, \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

Com isso, pode-se definir a velocidade no espaço-tempo como:

$$\boxed{u = \frac{dx}{d\tau}},$$

$$\Rightarrow u_0 = \gamma \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c \quad \text{e} \quad u_i = \gamma \frac{dx_i}{dt} = \gamma v_i \quad \text{p/ } i=1,2,3.$$

$$\therefore \boxed{u = (\gamma c, \gamma \vec{v})},$$

cujas norma ao quadrado é

$$\begin{aligned} \|u\|^2 = \langle u, u \rangle &= \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \vec{v}^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) \\ &= c^2. \end{aligned}$$

① momento linear relativístico fica então definido por

$$p = m u,$$

$$\Rightarrow \boxed{p = (\gamma m c, \gamma m \vec{v})}$$

OBS: para as partes espaciais, vamos empregar a notação:

$$\vec{x} = \vec{r},$$

$$\vec{u} = \gamma \vec{v},$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}.$$

construir γm como "massa relativística" e', além de dimensional, não bem apropriado ao que hoje se compreende por massa e da matéria. Basta, e é mais natural, construir o momento relativístico.

Definidas as variáveis cinemáticas com derivadas em relação ao tempo próprio, para as leis dinâmicas buscam-se expressões da mesma forma que a Newtoniana, mantendo-se a forma do princípio fundamental da dinâmica, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$,

agora como

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = (f_0, \vec{f})$$

Para $i=1,2,3$:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v})$$

$$= m \left(\frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

$$= m \left(\frac{\gamma^3}{c^2} (\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}) \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

$$= m \gamma \left(\frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \vec{a} \right)$$

$$= m \gamma \left(\frac{\gamma^2}{c^2} v^2 (\hat{v} \cdot \vec{a}) \hat{v} + \vec{a} \right)$$

$$(\gamma^2 \beta^2 \vec{a}_{||}) + (\vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}) = (\gamma^2 \beta^2 + 1) \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$$

$$\Rightarrow \vec{f} = m \gamma (\gamma^2 \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp})$$

$$= \gamma m \vec{a}_{\perp} + \gamma^3 m \vec{a}_{||}$$

$$= \gamma \vec{F}_{\perp} + \gamma^3 \vec{F}_{||}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \left(-\frac{2}{c^2} \right) \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} + 1 = \frac{\beta^2 + 1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$$

enquanto para a componente temporal :

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \frac{d\vec{p}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma mc) \\
 &= mc \frac{d\gamma}{dt} = mc \frac{\gamma^3}{c^2} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 &= \frac{\gamma^3}{c} m \vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{\gamma^3}{c} \vec{v} \cdot \vec{F}
 \end{aligned}$$

Logo :

$$\underline{\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{\gamma^3}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{F}_\perp + \gamma^3 \vec{F}_\parallel \right)}$$

onde identificamos $\vec{F} \cdot \vec{v}$ como a potência resultante.

Mantendo-se o teorema trabalho-energia cinética, em uma forma para massa constante :

$$dW_R = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dK \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

temos agora, para a versão relativística :

$$\begin{aligned}
 \frac{dK}{dt} &= \vec{f} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} \\
 &= \vec{v} \cdot \frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} = m\vec{v} \cdot \left(\frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\
 &= m\vec{v} \cdot \left(\frac{\gamma^3}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\
 &= m\gamma \underbrace{\left(\frac{\gamma^2}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{v} + 1 \right)}_{\gamma^2\beta^2 + 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = \gamma^2} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = m \gamma^3 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} (m \gamma c^2)$$

$$\Rightarrow K = \gamma mc^2 + \text{cte},$$

onde a constante de integração pode ser determinada com a condição de que a energia cinética se anula em $\vec{v} = \vec{0}$:

$$K(v=0) = 1 \cdot mc^2 + \text{cte} = 0 \Rightarrow \text{cte} = -mc^2,$$

$$\Rightarrow K = \gamma mc^2 - mc^2,$$

o que, reescrito como

$$\gamma mc^2 = K + mc^2$$

permite a interpretação de mc^2 como uma energia de repouso e de

$$\underline{\underline{\gamma mc^2 \equiv E}}$$

como a energia (total) da partícula em questão.

Retomando a expressão do momento relativístico

$$\mathcal{P} = (\gamma mc, \gamma m \vec{v}),$$

identificamos que $p_0 = \frac{E}{c}$, de modo que podemos escrever

$$\boxed{\mathcal{P} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)}, \text{ com } \vec{p} = \gamma \vec{p} = \gamma m \vec{v},$$

e cuja norma ao quadrado é

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}\|^2 &= \langle \mathcal{P}, \mathcal{P} \rangle = p_0^2 - \vec{p}^2 \\ &= m^2 \gamma^2 c^2 - m^2 \gamma^2 v^2 \\ &= m^2 \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= m^2 \gamma^2 c^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2}, \end{aligned}$$

Agora faz mais sentido discriminarmos p e $\vec{p}$, chamando a partir de então p de quadri-momento e $\vec{p}$ de momento relativístico.

$$\Rightarrow m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2,$$

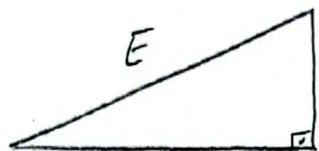
$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2},$$

expressão esta para a energia de uma partícula que é prática e conceitualmente importantíssima, e que exploraremos a seguir.

A equação

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

pode ser representada como a energia relativística tendo duas "componentes":



mc^2 : termo de massa: massa como forma de energia!

$|p|c$: termo cinético!

→ lembrando que a energia cinética propriamente dita é $K = E - mc^2$!

Como E/c é a componente temporal do quadrivetor, torna-se mais relevante, como veremos em breve.

• Exemplos:

- próton: $m_p = 1,00728 u$
- nêutron: $m_n = 1,00866 u$
- núcleo de hidrogênio-2, 2_1H : $2,01410 u$

$$\left. \begin{array}{l} 1u = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ c = 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} (m_p + m_n) - 2,01410 &= 1,84 \cdot 10^{-3} u \\ &= 3,05539 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{i.c} - E_{f.c} = m_i c^2 - m_f c^2 = 2,74604 \cdot 10^{-13} \text{ J} !$$

→ Atividade prática!

→ massa de 2_1H ligada ao 2_1H p/ moléculas?

- Exemplo: colisão "completamente inelástica" (ou não!):

Agora a conservação se aplica ao quadrimomento!

PRÉ-COLISÃO:

$$\begin{matrix} m \\ \bullet \rightarrow \vec{v} \\ (1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m \\ \bullet \\ (2) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (\gamma_1 m c, \gamma_1 m \vec{v}) + (m c, \vec{0}) \\ &= ((\gamma_1 + 1) m c, \gamma_1 m \vec{v}) \end{aligned}$$

PÓS-COLISÃO:

$$M \rightarrow \vec{v}'$$

$$\mathcal{P}' = (\gamma' M c, \gamma' M \vec{v}')$$

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \Rightarrow \begin{cases} \gamma' M c = (\gamma_1 + 1) m c \\ \gamma' M \vec{v}' = \gamma_1 m \vec{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{v}'}{c} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \frac{\vec{v}}{c} \Rightarrow \vec{v}' = \underbrace{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \right)}_{\text{OBS: } \gamma_1 \geq 1 \Rightarrow v' \geq \frac{v}{2}!} \vec{v}$$

enquanto

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}', \mathcal{P}' \rangle &= M^2 c^2 = \langle \mathcal{P}, \mathcal{P} \rangle \\ &= (\gamma_1 + 1)^2 m^2 c^2 - \gamma_1^2 m^2 \vec{v}^2 \\ &= m^2 c^2 \left(1 + 2\gamma_1 + \underbrace{\gamma_1^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right)}_{\gamma_1^2} \right) \\ &= m^2 c^2 (2\gamma_1 + 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = m \sqrt{2(\gamma_1 + 1)} \geq 2m!$$

Exemplos numéricos p/ ordem de grandeza de $\sqrt{2(\gamma_1 + 1)} = \frac{M}{m}!$
 Plot WolframAlpha

- Exemplos: como fica a relação energia-momento se $m=0$?

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2,$$

então $m=0 \Rightarrow \underline{\underline{E = |\vec{p}| \cdot c}}$

No Exercício 4, mostramos que $\frac{|\vec{S}|}{c} = u$, onde u é a densidade de energia de uma onda eletromagnética plana e $\vec{S}$ é o vetor de Poynting, que em nossos estudos anteriores vimos, como citado neste exercício, que $\frac{\vec{S}}{c^2}$ é a densidade de momento linear do campo eletromagnético:

$$\vec{p}_{em} = \frac{\vec{S}}{c^2},$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{S}|}{c} = |\vec{p}_{em}| \cdot c = u ! \quad \text{☺}$$

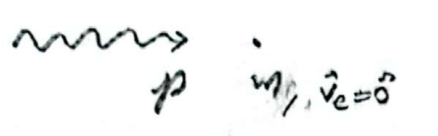
↳ por que a luz tem energia e momento linear, relacionados da forma acima, podemos descrever seu quadrimomento como

$$\mathcal{P} = \left(\frac{u}{c}, \vec{p}_{em} \right) = (|\vec{p}_{em}|, \vec{p}_{em}),$$

e assim podemos abordar o próximo exemplo...

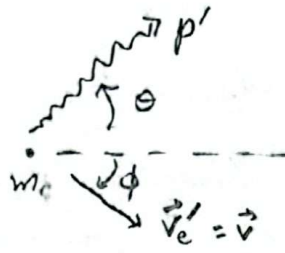
- Exemplo: Colisão entre uma onda eletromagnética e um elétron:

PRÉ-COLISÃO:



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{em} = (p, p, 0, 0) \\ \mathcal{P}_e = (mc, 0, 0, 0) \end{array} \right. ;$$

PÓS-COLISÃO:



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}'_{em} = (p', p' \cos \theta, p' \sin \theta, 0) \\ \mathcal{P}'_e = (\gamma mc, \gamma mv \cos \phi, -\gamma mv \sin \phi, 0) \end{array} \right.$$

A estrutura dos quadris vetores permite uma análise mais interessante especificamente na transferência de energia:

$$\mathcal{P}'_{em} + \mathcal{P}'_e = \mathcal{P}_{em} + \mathcal{P}_e$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}'_{em} - \mathcal{P}_{em} = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}'_e$$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{P}'_{em} - \mathcal{P}_{em}, \mathcal{P}'_{em} - \mathcal{P}_{em} \rangle = \langle \mathcal{P}_e - \mathcal{P}'_e, \mathcal{P}_e - \mathcal{P}'_e \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{P}'_{em}, \mathcal{P}'_{em} \rangle + \langle \mathcal{P}_{em}, \mathcal{P}_{em} \rangle - 2 \langle \mathcal{P}'_{em}, \mathcal{P}_{em} \rangle =$$

$$= \langle \mathcal{P}'_e, \mathcal{P}'_e \rangle + \langle \mathcal{P}_e, \mathcal{P}_e \rangle - 2 \langle \mathcal{P}'_e, \mathcal{P}_e \rangle$$

$$\Rightarrow 0 + 0 - 2 \langle p_{e'x}, p_{ex} \rangle = m^2 c^2 + m^2 c^2 - 2 \langle p_{e'}, p_e \rangle$$

$$\Rightarrow \langle p_{e'x}, p_{ex} \rangle = \langle p_{e'}, p_e \rangle - m^2 c^2$$

$$\Rightarrow \langle (p', \vec{p}'), (p, \vec{p}) \rangle = \langle (\gamma mc, \gamma m \vec{v}), (mc, \vec{0}) \rangle - m^2 c^2$$

$$\Rightarrow p \cdot p' - \vec{p} \cdot \vec{p}' = \gamma m^2 c^2 - \gamma m \vec{v} \cdot \vec{0} - m^2 c^2$$

$$\Rightarrow p \cdot p' (1 - \cos \theta) = (\gamma - 1) m^2 c^2$$

enquanto $p_0' = p_0 \Rightarrow p + mc = p' + \gamma mc$

$$\Rightarrow (\gamma - 1) mc = p - p'$$

$$\therefore p \cdot p' (1 - \cos \theta) = (p - p') \cdot mc$$

$$\text{Logo: } \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1 - \cos \theta}{mc}$$

expressão que relaciona o ângulo de espalhamento da luz a suas energias $p_{e'}$ e p_{e} - espalhamento e a massa da partícula em questão.

Retornaremos a essa equação no próximo tópico do curso, em que veremos que ela se tornou conhecida como "espalhamento Compton".

□