

Relatividade especial

11

* Introdução:

• Campo eletromagnético:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{r}}{r^2} = -\vec{\nabla}V \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{v} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\underbrace{dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}}_{\text{fonte: cargas}} \quad ; \quad \underbrace{d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{r}}{r}}_{\text{fonte: cargas em movimento}}$$

$\therefore$ o que V , $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ depende do referencial!

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$: diferentes previsões?

transformações dos campos $(\vec{E}, \vec{B})$ para diferentes referenciais (a diferentes velocidades):
a ser adequadamente restrito pela relatividade especial!

• Ondas eletromagnéticas:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\psi = \vec{E}, \vec{B})$$

↳ "vácuo": $v = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

↓
velocidade de propagação:

ex: v_{som} em relação a ???

$v_{\text{som, ar}}$; $v_{\text{som, ref.}}$

ideia de um meio: "éter"

material,
ou não: vários
modelos e
propostas

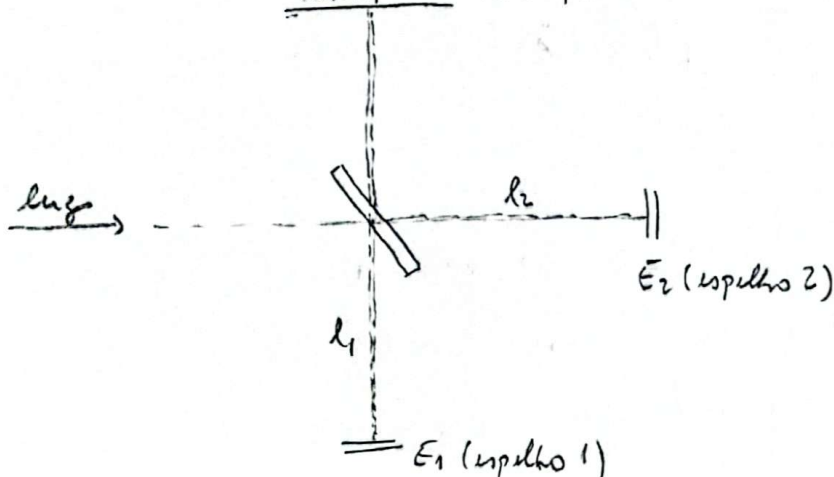
TESTES
EXPERIMENTAIS:

$v_{\text{em, etér}}$; $v_{\text{em, lab.}}$

• Experimento de Michelson & Morley (1887):

↳ Interferômetro de Michelson:

antepara: interferência: $2l_1 - 2l_2 = \begin{cases} m \lambda_0 \quad (m \in \mathbb{Z}) : \text{CONSTRUT.} \\ (m + \frac{1}{2}) \lambda_0 \quad (m \in \mathbb{Z}) : \text{DESTRUT.} \end{cases}$



⇓
medidas precisas
para $(l_1 - l_2)$, com
 $v_{\text{em, lab}}$, mudando di-
reções p/ achar
 $v_{\text{lab, etér}}$, i.e. $v_{\text{em, etér}}$!

• "Sobre a eletrodinâmica de corpos em movimento" (1905)

↳ artigo de Einstein, com referências (!),
desenvolvendo as consequências dos dois
postulados a seguir:

↳ "RELATIVIDADE ESPECIAL"
ou
"RELATIVIDADE RESTRIITA"

- PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE RESTRIITA:

As leis físicas (incluindo as do eletromagnetismo) são válidas para todo e qualquer referencial inercial.

- PRINCÍPIO DA CONSTÂNCIA DA VELOCIDADE DA LUZ:

A luz se propaga no vácuo sempre com uma velocidade definida c , em qualquer direção e independente do estado de movimento da fonte emissora.

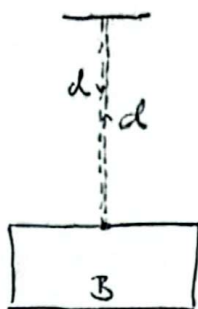
Faremos uma abordagem para explorar as consequências destes postulados, mas antes...

... "Ant takes a selfie":

→ v. vídeos do prof. Hafner (insolite)

(ou: alguém tira uma "selfie" num ônibus que se move a velocidade v em relação à Terra)

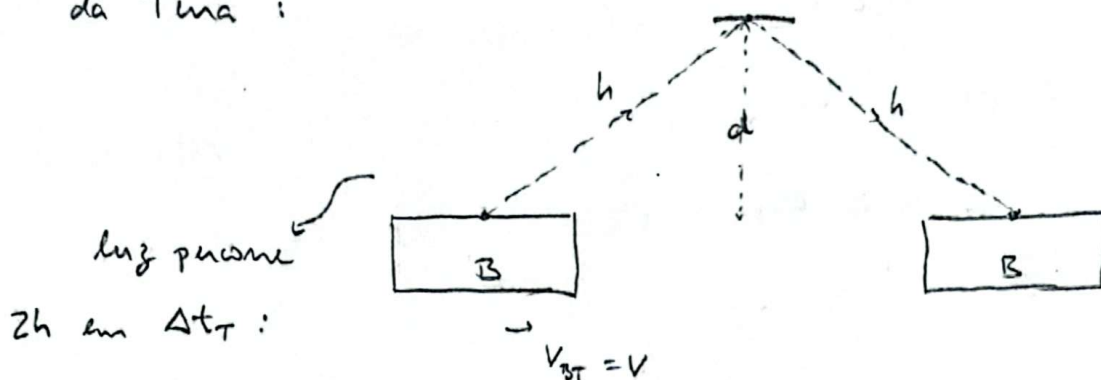
- Referencial do ônibus:



→ luz percorre $2d$ em Δt_B :

$$c_B = \frac{2d}{\Delta t_B}$$

- Referencial da Terra:



luz percorre

$2h$ em Δt_T :

$$c_T = \frac{2h}{\Delta t_T}$$

Impondo $c_B = c_T = c$, e relacionando h a d com v , obtém-se

$$\Delta t_T = \gamma \Delta t_B$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (chamado "fator de Lorentz").

Analisaremos este fenômeno com mais cuidado adiante.

EXERCÍCIO 16!

* Diagramas de espaço-tempo

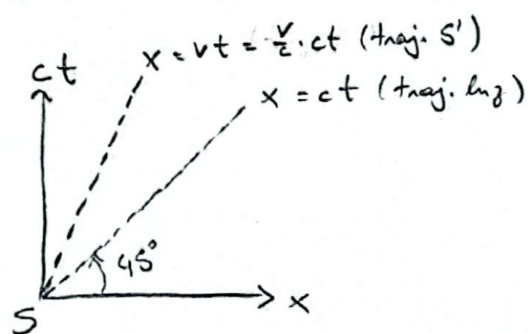
e transformações de Lorentz:

Consideremos dois referenciais inerciais, S e S' , com $v_{S'S} \equiv v$.

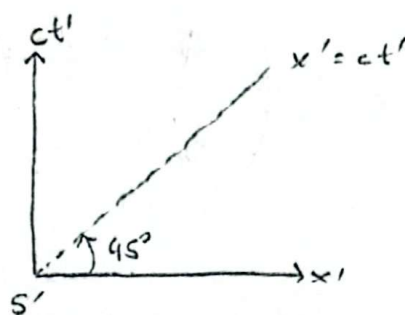
Suponhamos que, num instante em que suas origens coincidem, seja emitida, dali, luz cuja frente de onda esférica é descrita por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, & \text{em } S, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, & \text{em } S'. \end{cases} \quad (I)$$

Agora, os referenciais são descritos por quatro coordenadas, três espaciais e uma temporal. Destacando que o tempo agora é uma coordenada, e delimitando a visualização ao plano, descrevemos a trajetória da luz no diagrama de espaço-tempo de cada referencial como:



e



Para qualquer referencial inercial, um ponto em seu diagrama espaço-tempo é chamado um "evento" (assim, cada evento é o que ocorre num dado local, num dado instante).

As coordenadas (espaço-temporais!) de um evento não
 em geral distintas em diferentes referenciais (daqui em diante a
 serem entendidos inerciais), e se quisermos uma transformação
 que "traduza" as descrições em diferentes referenciais mantendo
 satisfeitos os postulados da relatividade especial, buscaremos então
 uma transformação:

$$L \begin{cases} \text{- linear;} \\ \text{- que preserve as frentes de onda (I).} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}.$$

Lembrando que a origem de S' , $x'=0$, é descrita em S
 por $x = vt$, fazemos então L mapear $x - vt$ em $x'=0$
 com

$$L = \begin{pmatrix} A & -\frac{v}{c} \cdot A \\ B & D \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$\begin{cases} x' = A \left(x - \frac{v}{c} \cdot ct \right) \\ ct' = Bx + Dct \end{cases},$$

$$\Rightarrow x'^2 - c^2 t'^2 = A^2 x^2 - 2A\beta xct + A^2 \beta^2 c^2 t^2 - (B^2 x^2 + 2BDxct + D^2 c^2 t^2) = x^2 - c^2 t^2 \quad \forall x, t,$$

onde introduzimos

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \text{que nada mais é do que a}$$

velocidade de S' relativa a S em unidades de c .

Assim:

$$A^2 - B^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B^2 = A^2 - 1$$

$$A^2 \beta^2 - D^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad D^2 = A^2 \beta^2 + 1$$

$$A\beta + BD = 0 \quad \Rightarrow \quad B^2 D^2 = A^4 \beta^2 = (A^2 - 1)(A^2 \beta^2 + 1) \\ = A^4 \beta^2 + A^2 - A^2 \beta^2 - 1$$

$$\Rightarrow A^2(1 - \beta^2) = 1$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$$

Tomando x e x' no mesmo sentido em $ct = 0$: $A = +\gamma$.

$$\Rightarrow D^2 = \gamma^2 \beta^2 + 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} + \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$$

Tomando ct' e ct no mesmo sentido em $x = 0$: $D = +\gamma$.

$$\Rightarrow B = \frac{-A\beta}{D} = \frac{-\gamma^2 \beta}{\gamma} \Rightarrow \underline{B = -\beta \gamma}$$

Logo, $L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$, a chamada transformação de Lorentz!

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix},$$

ou, equivalentemente:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}.$$

Ha' também uma expressão da transformação de Lorentz como uma "rotação hiperbólica":

$$L = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}, \text{ onde } \cosh \varphi = \gamma,$$

↓
v. Apêndice.

$$\sinh \varphi = \beta\gamma,$$

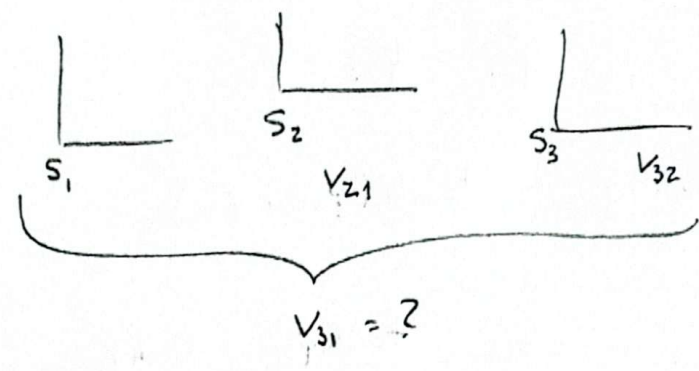
$$\text{e } \tanh \varphi = \beta.$$

OBS: A transformação inversa, $L^{-1}: \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$ corresponde a

troca do sinal em β : v. Exercício 17!

Esta expressão da transformação de Lorentz é especialmente conveniente para explorarmos a composição de velocidades na relatividade especial.

Sejam três referenciais, S_1, S_2 e S_3 :



Com a composição de transformações / boosts de Lorentz, podemos conectar diretamente os referenciais S_3 e S_1 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_3 \\ ct_3 \end{pmatrix} &= L_{32} \begin{pmatrix} x_2 \\ ct_2 \end{pmatrix} \\ &= L_{32} \cdot L_{21} \begin{pmatrix} x_1 \\ ct_1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh \varphi_{32} & -\sinh \varphi_{32} \\ -\sinh \varphi_{32} & \cosh \varphi_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \varphi_{21} & -\sinh \varphi_{21} \\ -\sinh \varphi_{21} & \cosh \varphi_{21} \end{pmatrix}}_{L_{31}} \begin{pmatrix} x_1 \\ ct_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_{31} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_{32} \cosh \varphi_{21} + \sinh \varphi_{32} \sinh \varphi_{21} & -\sinh \varphi_{32} \cosh \varphi_{21} - \cosh \varphi_{32} \sinh \varphi_{21} \\ -\sinh \varphi_{32} \cosh \varphi_{21} - \cosh \varphi_{32} \sinh \varphi_{21} & \cosh \varphi_{32} \cosh \varphi_{21} + \sinh \varphi_{32} \sinh \varphi_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_{31} = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_{32} + \varphi_{21}) & -\sinh(\varphi_{32} + \varphi_{21}) \\ -\sinh(\varphi_{32} + \varphi_{21}) & \cosh(\varphi_{32} + \varphi_{21}) \end{pmatrix}$$

Logo, a composição de velocidades na relatividade n dá tal que

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} + \varphi_{21},$$

$$\Rightarrow \tanh \varphi_{31} = \tanh(\varphi_{32} + \varphi_{21})$$

$$= \frac{\tanh \varphi_{32} + \tanh \varphi_{21}}{1 + \tanh \varphi_{32} \cdot \tanh \varphi_{21}}$$

$$\therefore \beta_{31} = \frac{\beta_{32} + \beta_{21}}{1 + \beta_{32} \beta_{21}},$$

$$\Rightarrow v_{31} = \frac{v_{32} + v_{21}}{1 + v_{32} v_{21} / c^2}.$$

ou, de modo mais geral, temos a seguinte

adição relativística de velocidades:

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

OBS: $\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} > 1 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 > 1 + \beta_1 \beta_2 \Rightarrow \beta_1 (1 - \beta_2) > (1 - \beta_2) \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 > 1 \\ \text{ou} \\ \beta_2 > 1 \end{cases}$

$$\therefore (v_1 \leq c \text{ e } v_2 \leq c) \Rightarrow v_1 \oplus v_2 \leq c !$$

Antes de prosseguirmos para as consequências das transformações de Lorentz na estrutura do espaço-tempo, vale registarmos que o apresentado cabe ao caso em que

$$\vec{V}_{S'S} = V \cdot \hat{x}.$$

Para transformações entre referenciais cuja velocidade relativa tem outra direção que não dos eixos x e x' , pode-se compor a transformação de Lorentz como vimos com matrizes de rotação, alinhando os eixos x e x' a $\vec{V}$ ou, equivalentemente, aplicar a transformação geral a seguir:

$$\vec{r}'_{\parallel} = \gamma (\vec{r}_{\parallel} - \vec{V} t) \quad , \quad \vec{r}_{\parallel} = \vec{r} \cdot \hat{V} \quad ;$$

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \quad , \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} \quad ;$$

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma (ct - \beta \vec{r}_{\parallel}) \\ &= \gamma c \left(t - \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) . \end{aligned}$$

Apêndice :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}^L \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = Ax + Bct \\ ct' = Cx + Dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow x'^2 - c^2 t'^2 = A^2 x^2 + 2ABxct + B^2 c^2 t^2 - (C^2 x^2 + 2CDxct + D^2 c^2 t^2) = x^2 - c^2 t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 - C^2 = 1 \\ B^2 - D^2 = -1 \\ AB - CD = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{parametrizando } \begin{cases} A = \cosh \varphi \\ C = -\sinh \varphi \end{cases} :$$

$$A^2 - C^2 = \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1 \quad \checkmark$$

$$AB = CD$$

$$\Rightarrow \frac{B}{D} = \frac{C}{A} = -\tanh \varphi$$

$$\Rightarrow B^2 - D^2 = D^2(-1 + \tanh^2 \varphi) = -1$$

$$\Rightarrow D^2 \left(\frac{-\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi}{\cosh^2 \varphi} \right) = -1$$

$$\Rightarrow D = \pm \cosh \varphi \Rightarrow B = \mp \sinh \varphi$$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \mp \sinh \varphi \\ \mp \sinh \varphi & \pm \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \cdot \cosh \varphi \mp ct \cdot \sinh \varphi \\ ct' = \pm ct \cdot \cosh \varphi - x \cdot \sinh \varphi \end{cases}$$

Como $x' = 0$ e descrito em S por $x = vt$,
 $x = vt \Rightarrow x = vt \cdot 0$

então $x' = \gamma x \cdot \cosh \varphi + \gamma ct \cdot \sinh \varphi$

$$= \gamma vt \cdot \cosh \varphi + \gamma ct \cdot \sinh \varphi = (\gamma v \cosh \varphi + \gamma c \sinh \varphi) t = 0$$

$$\Rightarrow \gamma c \sinh \varphi = -\gamma v \cosh \varphi$$

$$\Rightarrow \tanh \varphi = -\frac{v}{c} = -\beta$$

$$\beta = -\sinh \varphi$$

$$\Downarrow$$
$$\gamma = +\cosh \varphi$$

ângulo φ é
mesmo ângulo da
velocidade v .

$$\therefore L = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix},$$

onde $\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$

$$\text{e } -\sinh \varphi = -\tanh \varphi \cdot \cosh \varphi = -\beta \gamma \quad "$$