

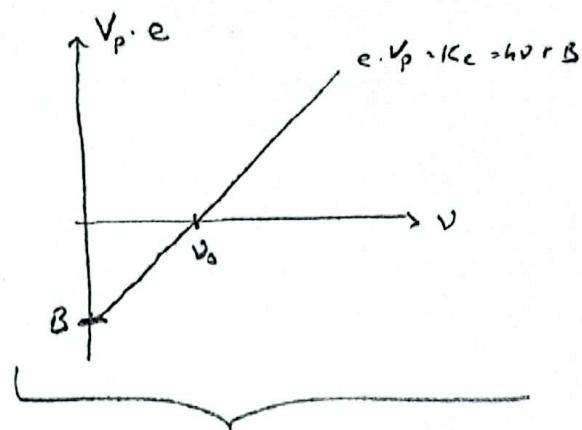
Efeito fotoelétrico:

• EXP: $K_e = A \cdot \nu + B$

$\downarrow$

$h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$\downarrow$ "ação"



$\nu = 0$: A / significado

ν_0 : $0 = h\nu_0 + B$

$\Rightarrow B = -h\nu_0$

$\downarrow$
freq. p/ a qual
 $K_e = 0$.

• TESE/PROPOSTA:

$h\nu = K_e - B$

$= K_e + W$

$\downarrow$
energia
cinética de
cada elétron
"desprendido."

$\downarrow$ energia para "desprender"
cada elétron da estrutura
do material: "função trabalho."

energia transferida
a cada elétron pela luz ! (?) } $\Rightarrow$ "fóton" ?!?

? (!)

• EXP:

+ Aspecto temporal : emissão imediata of a incidência
(Contraste of perspectiva ultramoderna clássica)

* Intensidade $\uparrow$: $\uparrow$ taxa/quantidade de interações...

- CONTEXTO HISTÓRICO: Eletromagnetismo, interação radiação-matéria e termodinâmica!!

↳ Qual a cor de um objeto a dada temperatura?

↳ videos nos slides

- 1879: Lei de Stefan: $I_T = \int I(T, \lambda) d\lambda = \sigma \cdot e \cdot T^4$

↳ $e \in [0, 1]$: poder de emissão

cte de Stefan-Boltzmann:
EXP. TEOR.

$$\sigma \approx 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$$

- 1895: Kirchhoff: c/ termodinâmica, no equilíbrio térmico:

$$e = a$$

poder de emissão poder de absorção: $\frac{E_{\text{absorvida}}}{E_{\text{incidente}}}$

referente a cada material

* "Corpo negro": $a = 1$

$$\therefore e = 1!$$

- 1899 : EXP. Lummer & Pringsheim : (fig. nos slides).

$I(T, \lambda) d\lambda$: energia emitida, por unidade de tempo, em radiação entre λ e $\lambda + d\lambda$, por unidade de área de uma superfície em equilíbrio térmico a T .

> - $\forall \lambda_0$, $I(T, \lambda_0)$ é crescente com T .

$$= \left. \frac{\partial I}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_{\max}} = 0 : \lambda_{\max}(T) \text{ é decrescente}$$

- 1893 : Lei (do deslocamento) de Wien : cf termodinâmica :

$$\lambda_{\max} \cdot T = 0,2898 \text{ K} \cdot \text{cm}$$

$$= C_0 \rightarrow \text{cte fundamental ??} \dots$$

* Modelo de corpo negro :

- cavidade com pequena abertura, radiação entra e fica sendo refletida e absorvida, mas o que sai pela abertura é desprezível.
- paredes em equilíbrio térmico a T , emitindo radiação.
- densidade de energia, por unidade de volume, da radiação entre λ e $\lambda + d\lambda$: $\rho(T, \lambda) d\lambda \propto I(T, \lambda) d\lambda$
- isso tudo, junto a pressão da radiação ...

14
↳ Radiação na cavidade tal qual um gás!!

↑
termodinâmica e mecânica estatística!
Boltzmann

• Também lei de Wien:

$$p(T, \lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5} \quad (\text{v. fig. nos slides})$$

⇒ $p(T, \lambda)$ conhecido a partir de
qualquer $p(T_0, \lambda)$!

* P.ex.: digamos que temos a distribuição espectral para $T_0 = 100\text{K}$,
então podemos obter a distribuição para, digamos, $T = 300\text{K}$ por:

$$\begin{aligned} p(300, \lambda) &= \frac{f(300 \cdot \lambda)}{\lambda^5} = \frac{f(100 \cdot 3\lambda)}{\lambda^5} \\ &= \frac{(3\lambda)^5 \cdot p(100, 3\lambda)}{\lambda^5} \\ &= 3^5 \cdot p(100, 3\lambda), \end{aligned}$$

de onde notamos que

$$p(T, \lambda) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^5 \cdot p\left(T_0, \frac{T}{T_0} \lambda\right).$$

↳ Mas a $f(\lambda T) = ??$

↳ p/ além da termodinâmica: análise com as especificidades do sistema em questão!

↳ Voltamos aos modelos de corpo negro mencionados na p.3:

→ cavidade em equilíbrio térmico,

+ cubica (arestas a) e paredes metálicas:

• 1900: Rayleigh & Jeans: ondas estacionárias
com nós na superfície:

$$\vec{E} = \vec{A} \cdot \sin(\omega t),$$

$$\vec{A} = (A_x \cdot \sin(k_x \cdot x), A_y \cdot \sin(k_y \cdot y), A_z \cdot \sin(k_z \cdot z)),$$

$$\vec{k} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_x}, \frac{1}{\lambda_y}, \frac{1}{\lambda_z} \right),$$

$$k_{x_i} \cdot a = n_{x_i} \cdot \pi, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad x_i = x, y, z, \quad *$$

de modo que os comprimentos de onda "permitidos" são dados por:

$$\frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} : n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N},$$

ou, para as frequências:

$$\nu = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} : n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}.$$

* Lembrando que, para uma onda estacionária em 1D:



$$a = \frac{n\lambda}{2} = \frac{n\lambda \cdot \pi}{2\pi} = \frac{n\pi}{k},$$

e no caso 3D teremos uma composição de tais modos para cada direção:

$$\vec{k} = \left(\frac{n_x \pi}{a}, \frac{n_y \pi}{a}, \frac{n_z \pi}{a} \right),$$

$$\Rightarrow k^2 = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{k \cdot a}{\pi} = \frac{2a}{\lambda} = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}.$$

... mas o que isso tem a ver,
ou como conectar isso com a termodinâmica ?!

↳ Mecânica estatística !!

PREÂMBULO:

Mecânica Newtoniana : $\vec{F}_a = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Mecânica Lagrangiana : $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \Leftrightarrow \delta S = \delta \int_a^b L(q_i, \dot{q}_i) dt$

$L = K - U$

coordenadas generalizadas : graus de liberdade!

velocidades generalizadas, $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$

ação!

Mecânica Hamiltoniana : $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$, $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$

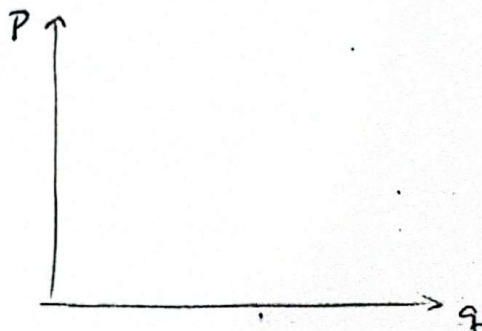
$H(q_i, p_i) = K(p_i) + U(q_i)$

coordenada generalizada

momento generalizado : $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Cada ponto no
espaço de fase :
um estado do sistema!
único!

espaço de fase :



* Exemplos: oscilador harmônico (v. slides).

↳ Para um sistema de N graus de liberdade:
 $\hookrightarrow \sim \text{mols!}$

Espaço de fase $2N$ -dimensional:

- cada ponto N um microestado do sistema;
- a cada macroestado do sistema corresponde um conjunto de microestados.
 $\hookrightarrow (P, V, T)$, p.ex.

↳ Princípio da mecânica estatística: hipotese ergódica:

$$\begin{array}{ccc} \text{Média temporal} & \equiv & \text{Média sobre o} \\ \text{(p/ tempos suficien-} & & \text{espaço de fase} \\ \text{temente grandes)} & & \end{array} !$$

$\Rightarrow$ Assim, a probabilidade de o sistema estar num macroestado corresponde a uma medida dos microestados correspondentes no espaço de fase.

* Exemplo: 1 partícula: a probabilidade de a partícula ter momento

entre $\vec{p}$ e $\vec{p} + d\vec{p}$ e estar entre $\vec{q}$ e $\vec{q} + d\vec{q}$ =

$$= \frac{\text{n.º de estados no intervalo}}{\text{n.º total de estados}}, \text{ "ponderado" pelo peso de Boltzmann}$$

$$= \frac{e^{-H/kT} d^3q d^3p}{\int e^{-H/kT} d^3q d^3p}, \text{ onde } k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

é a constante de Boltzmann,

Enquanto valores médios são dados também por meio desta medida.

* P. ex.: 1 partícula livre: $U(q) = 0 \Rightarrow H = E = K$,

de modo que o valor médio da energia é dado por

$$\langle E \rangle = \frac{\int \frac{\vec{p}^2}{2m} e^{-\vec{p}^2/2mkT} d^3q d^3p}{\int e^{-\vec{p}^2/2mkT} d^3q d^3p}$$

$$= \frac{3}{2} kT$$

→ isso decorre a equação
do gás ideal, $PV = NkT$
 $= nRT$,

$$\text{com } R = N_A \cdot k!$$

• Teorema da equipartição de energia:

$$\langle E \rangle = \frac{kT}{2} \text{ para cada grau de liberdade dos}$$

"entes elementares" de um sistema.

→ OBS: já foram observados desvios deste
resultados para baixas temperaturas,
os quais foram compreendidos e
descritos a partir de extensões da
proposta de Planck...

Em particular
para medidas de
calor específico em
função da temperatura.

Voltemos então à cavidade contendo radiação como modelo de corpo negro, contabilizando o número de estados (modos normais do campo eletromagnético) com frequências entre ν e $\nu + d\nu$:

$$N(\nu) d\nu = N(n) dn : r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2a}{c} \cdot \nu \rightarrow r, \text{ fig. nos slides}$$

= volume de uma casca de esferas de raio r num octante ($n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$)

$$= \frac{1}{8} \cdot 4\pi r^2 dr,$$

$$\Rightarrow N(\nu) d\nu = \underbrace{\frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu}_{\text{factors below}}$$

$\times 2$ p/ contabilizar 2 polarizações independentes,

$\div a^3$ para obter a densidade de estados,

$\times \frac{kT}{2}$ com a equipartição de energia,

$$\therefore p(T, \nu) = \frac{8\pi}{c^3} \cdot kT \cdot \nu^2 d\nu,$$

$$\text{ou: } p(T, \lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda = \frac{8\pi k \cdot \lambda T}{\lambda^5} d\lambda,$$

recall:

$$\lambda \nu = c$$

$\Downarrow$

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{1}{\lambda} \cdot \nu^2 d\lambda, \text{ relevando o sinal (que indica somente o sentido crescente de } \lambda \text{ ou o sentido decrescente de } \nu),$$

$$\Rightarrow \frac{\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{\nu^4}{c^4} d\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda^4}.$$

o que nos dá

$$f(\lambda T) = 8\pi k T \lambda !,$$

a qual, contudo, não descreve os resultados experimentais, com $\rho(T, \lambda)$ divergindo para baixos comprimentos de onda / altas frequências,
 $\rightarrow \infty$

o que é conhecido historicamente como a catástrofe ultravioleta.

↳ v. fig nos slides.

• 1896 : Lei de Wien : anteriormente, Wien propôs, com a distribuição de Boltzmann,

$$\rho(T, \nu) = \frac{8\pi}{c^3} k\beta e^{-\beta \nu / T} \nu^3 d\nu,$$

com β ajustado obtendo um bom acordo com os dados experimentais na

região $\frac{\nu}{T} \gtrsim 10^{11} \text{ Hz/K}$, mas não para baixas frequências / altos

comprimentos de onda, o que se deve a aperfeiçoamentos experimentais de 1900

• 1897-1899 : Enquanto isso, Planck ...

... estudava a entropia de sistemas de osciladores e obteve

uma expressão $S(p, \nu)$ consistente com a distribuição $\rho(T, \nu)$ de

Wien. Com a discordância experimental da distribuição de Wien

em 1900, Planck propôs uma interpolação, numa função relacionada à

entropia, com distintos termos dominantes para baixas ou altas frequências, obtendo como resultado a distribuição dada por:

$$\rho(T, \nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu, \quad (*)$$

ou: $\rho(T, \lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1} d\lambda.$

* OBS: conexão com a constante β de Wien: $h = k \cdot \beta$

* OBS: lembrando da constante "C₀":

$$C_0 = 0,29 \text{ K} \cdot \text{cm} = \lambda_{\text{max}} \cdot T$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_{\text{max}}}{c} \cdot kT = \frac{C_0 \cdot k}{c} \quad ; \quad \frac{\text{K} \cdot \text{m} \cdot \text{J/K}}{\text{m/s}} = \text{J} \cdot \text{s}$$

$\downarrow$
 $\frac{1}{\nu}$

$\downarrow$
 E

$$\therefore \frac{kT}{\nu_{\text{max}}} = \frac{C_0 \cdot k}{c} \propto h!$$

* OBS: Significado geométrico da constante h no espaço de fase de osciladores: v. trechos de Richtmyer no msodde; e aqui notamos que

$$\begin{aligned} \dim(pq) &= \dim\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q}\right) = \frac{[\text{energia}]}{\dim(q)/[\text{tempo}]} \cdot \dim(q) \\ &= \dim(h) \\ &= [\text{ação}]! \end{aligned}$$

A obtenção desta distribuição por Planck levou à Mecânica Estatística de Boltzmann, em particular tomando a relação

$$\int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon \sum_{k=1}^n f(k\epsilon)$$

e, ao contrário de tomar $\epsilon \rightarrow 0$ junto a $n\epsilon \rightarrow \infty$ como Boltzmann, Planck explorou as implicações termodinâmicas com ϵ como parâmetro, obtendo assim uma distribuição tomando $\epsilon = h\nu$!

Este resultado equivale a considerar um sistema de osciladores cujas energias só podem assumir valores múltiplos inteiros deste ϵ , i.e. $n\epsilon = nh\nu$ ($n \in \mathbb{N}$), resultando numa energia média de

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \text{ por oscilador, resultando}$$

na distribuição (*), com ótimo acordo experimental com $h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.

→ OBS: Foi em 1900 (Townsend & Thomson) e 1909 (Millikan)

que se observou toda carga (elétrica) ser um múltiplo inteiro $q = n \cdot e$, com $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ tomando, assim, o significado de carga elementar.

Desse modo, tem-se portanto o significado de

$h\nu$ como uma "energia elementar" para osciladores!
↳ de frequência ν !

partando à quantização de energia, temos:

↳ para baixas frequências: pequena energia elementar:

$h\nu \ll kT$: aproxima-se do limite contínuo:

: resultados clássico para grandes comprimentos de onda (Rayleigh-Jeans), ou para altas temperaturas

{ problema do calor específico (v. vídeos indicados no moodle)

↳ para altas frequências:

maior energia elementar:

graus de liberdade "congelados" a mais baixas temperaturas

A hipótese de Planck

foi aplicada, por Einstein e Debye,

com sucesso na descrição do calor específico de sólidos, abrangendo uma descrição para baixas temperaturas!

Com cada modo normal de frequência ν tendo energia

$E = h\nu$: para dada T , estados com maior ν têm menor região no espaço de fase a eles correspondente; logo, menor será a probabilidade de tais estados.

$$\therefore \begin{cases} p(T, \nu_0) \text{ crescente com } T \ \forall \nu_0 \\ p(T, \nu) \text{ decrescente com } \nu \ \forall T \end{cases}$$

o que descreve as observações experimentais!

De fato, estes são satisfatoriamente descritos pela distribuição de Planck, que resulta em

$$p(T, \nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

ou, equivalentemente:

$$p(T, \lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

A hipótese de Planck consistiu em quantizar — isto é, estabelecer unidades/quantidades "elementares" — a energia emitida ou absorvida de radiação por osciladores, tratando-se portanto da troca de energia entre radiação e matéria, a ocorrer assim em unidades/múltiplos inteiros de $E = h\nu$.

Este é o contexto histórico do efeito fotoelétrico, ao que Einstein aplicou e estendeu a proposta de Planck para a radiação eletromagnética em si, propondo que, no efeito fotoelétrico, toda a energia $h\nu$ da radiação incidente é transferida ao elétron.



Aqui está a ampliação do " $E = h\nu$ "!

Com a energia da radiação consistindo nesses "quanta" individuais, Einstein (1905) pôde descrever todas as características do efeito fotoelétrico observados por Millikan (1916):

- Emissão praticamente imediata com a incidência;
- Corrente elétrica $\propto \frac{\text{nº de quanta de luz}}{\text{unidade de tempo}} \propto \text{intensidade da luz}$;
- K_c independente da intensidade e linear com a frequência.

• 1909: Einstein, analisando a pressão de radiação sobre um espelho dentro de uma cavidade contendo radiação, obteve a expressão

$$p = \frac{h\nu}{c} \equiv \frac{h}{\lambda} \quad \text{para o momento linear dos}$$

quanta de luz.
 $\hookrightarrow$ fótons!! (nome de 1926).