

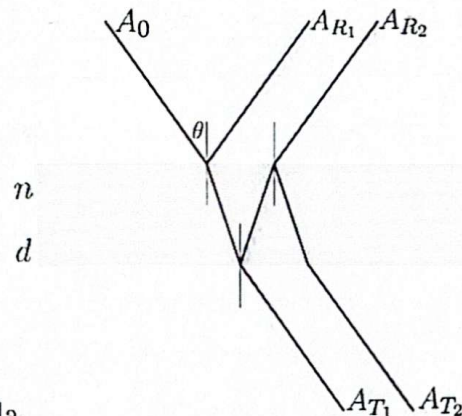
REGRAS:

- Todas as questões devem ser resolvidas com base no material disponibilizado no moodle e desenvolvidas detalhada e organizadamente.
- Não serão consideradas resoluções que partam de resultados “prontos” que não constem nas notas ou nos slides de aula.
- Não serão consideradas resoluções interpessoais demasiado semelhantes.

1. [4,0pt] Considere uma película de vidro com índice de refração $n = 1,5$ e espessura d , cujo valor é do seu interesse para projeto e fabricação. Considerando ambas as interfaces do vidro com o ar, que por sua vez tem índice de refração $n_0 \approx 1,0$, faça as análises a seguir para incidência normal, i.e. $\theta = 0$.

- 0,5 a. Determine as amplitudes refletidas A_{R1} , A_{R2} e transmitidas A_{T1} , A_{T2} em termos da amplitude incidente A_0 para cada polarização, TE e TM.

Com base nos resultados, avalie se é razoável aproximar $|A_{R1}| \approx |A_{R2}|$ e $A_{T2}/A_{T1} \approx 0$.



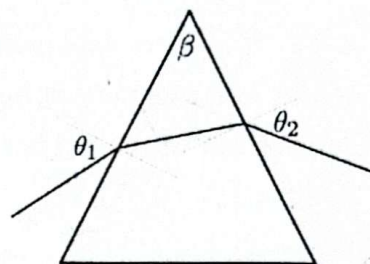
- 1,0 b. Empregando a aproximação acima, determine a intensidade da luz transmitida, I_T , em termos da incidente, I_0 , e a diferença de fase entre as amplitudes A_{R1} e A_{R2} e analise as condições para interferência construtiva ou destrutiva.
- 1,0 c. A partir da análise do item b, avalie os possíveis valores da espessura d para que se obtenha mínima reflexão na região do amarelo e, dentre estas possibilidades, se há ou não espessuras para as quais obtém-se máxima reflexão no espectro visível. Discuta quais seriam as melhores escolhas de d para, junto à mínima reflexão na região do amarelo: (i) evitar máxima reflexão no espectro visível; ou (ii) obter máxima reflexão em alguma outra região do espectro.
- 0,5 d. Escolha d para o objetivo c.i. Suponha que, após a fabricação da película conforme os parâmetros determinados, você observe que a intensidade da luz transmitida é 10% inferior ao calculado no item b. Com base nesta medida, determine o valor da parte imaginária do índice de refração da película.
- 0,5 e. Qual deveria ser a espessura d para transmitir somente 20% da intensidade incidente?
- 0,5 f. Considerando as análises dos itens b e c, explique porque os efeitos de interferência são menos significativos à medida que aumenta-se a espessura d do vidro.

2. [1.5pt] A partir da definição da intensidade I de uma onda eletromagnética plana como a potência média propagada por unidade de área, $I = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{k}$, e do vetor de Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, demonstre a expressão para a intensidade da onda em termos da amplitude complexa do campo elétrico.

3. [1.5pt] Você comprou um prisma mas perdeu o documento com as especificações de que material ele é feito. Ao consultar o *site* do fabricante, você encontra a tabela abaixo com os dados de cada material dos diferentes prismas comercializados.

Você então mede, com seu prisma, $\beta = 50^\circ$ e incide luz branca a um ângulo $\theta_1 = 60^\circ$, conforme ilustrado abaixo. Observando que a diferença entre os ângulos θ_2 em que as componentes azul e vermelha emergem é de 2° , conclua de que material seu prisma é feito.

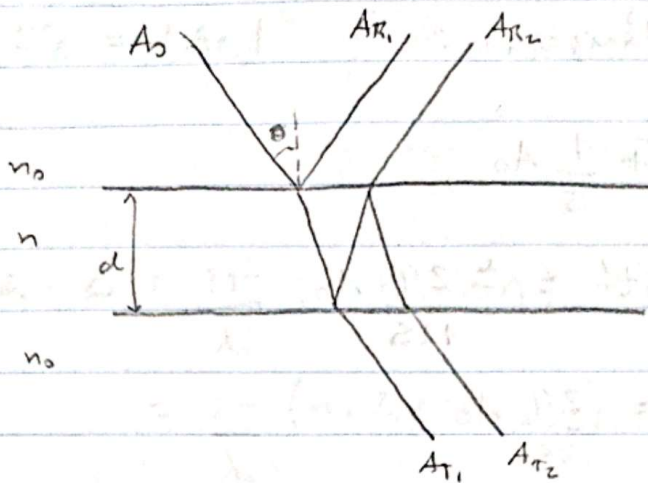
Table 17.1 Variation in index of refraction					
	Wavelength (in nanometers)				
	430 nm	490 nm	590 nm	660 nm	770 nm
	(violet)	(blue)	(yellow)	(orange)	(red)
Glass type					
Zinc Crown	1.528	1.523	1.517	1.514	1.511
Light Flint	1.594	1.585	1.575	1.571	1.567
Heavy Flint	1.674	1.664	1.650	1.644	1.628



4. [3.0pt] Você quer projetar uma rede de difração para fazer espectroscopia. Para tanto, faça a análise a seguir, empregando a aproximação para pequenos ângulos ($\theta \ll 1$).

- 0,5 a. Recapitule a expressão para a intensidade (normalizada) da onda difratada em função do número N de fendas, da distância d entre fendas adjacentes, da abertura a de cada fenda, do comprimento de onda λ incidente e do ângulo θ de detecção, descrevendo e argumentando qual é o termo de interferência e qual é o termo de difração.
- 0,7 b. Determine a “distância angular”, i.e. a diferença entre ângulos, entre um máximo principal e o zero mais próximo. Explique a razão desta “distância”, chamada *semilargura*, servir de medida da largura dos máximos principais.
- 0,8 c. Escreva a “distância angular” entre os máximos principais de dois comprimentos de onda, λ_1 e λ_2 , e analise seu comportamento com a “ordem” m dos máximos: Maior m é necessariamente melhor para discernir os máximos? Como faz diferença nesse aspecto a rede ser de difração e não apenas de interferência?
- 0,5 d. Determine a condição para que a “distância angular” entre dois máximos de comprimentos de onda λ_1 e λ_2 seja maior que as semilarguras destes máximos. Explique a razão desta condição servir de critério de resolução entre estes dois máximos.
- 0,5 e. Determine que critérios sua rede de difração deve satisfazer para que possa, dentro do espectro visível, discernir os primeiros máximos não centrais de comprimentos de onda que diferem entre si de: (i) 25 nm; (ii) 5 nm; (iii) 2 nm.

①



a) Interface ar-vidro :

$$\begin{cases} n_{21} = n/n_0 = n = 3/2 \\ r = E_{0R}/E_{0T} = r(\theta) \\ t = E_{0T}/E_{0I} = t(\theta) \end{cases}$$

Interface vidro-ar :

$$\begin{cases} n_{21} = n_0/n = 1/n = 2/3 \\ r' = E_{0R}'/E_{0T}' = r'(\theta) \\ t' = E_{0T}'/E_{0I}' = t'(\theta) \end{cases}$$

TE :

$$r(0) = \frac{1-n}{1+n} = \frac{-1/2}{5/2} = -\frac{1}{5}$$

$$t(0) = \frac{2}{1+n} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

$$r'(0) = \frac{1-1/n}{1+1/n} = \frac{1/3}{5/3} = \frac{1}{5}$$

$$t'(0) = \frac{2}{1+1/n} = \frac{2}{5/3} = \frac{6}{5}$$

TM :

$$r(0) = \frac{n^2-n}{n^2+n} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{1/2}{5/2} = \frac{1}{5}$$

$$t(0) = \frac{2n}{n^2+n} = \frac{2}{n+1} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$$

$$r'(0) = \frac{1/n-1}{1/n+1} = \frac{1/3-1}{1/3+1} = \frac{-1/3}{5/3} = -\frac{1}{5}$$

$$t'(0) = \frac{2}{1/n+1} = \frac{2}{5/3} = \frac{6}{5}$$

Sendo, para cada polarização:

$$A_{R1} = A_0 \cdot r = \mp \frac{1}{5} A_0,$$

$$A_{R2} = A_0 \cdot t \cdot r' \cdot t' = \pm \frac{24}{125} A_0, \quad \frac{25}{125} = 0,2$$

$$A_{T1} = A_0 \cdot t \cdot t' = \frac{24}{25} A_0,$$

$$A_{T2} = A_0 \cdot t \cdot r' \cdot r' \cdot t' = \frac{24}{25^2} A_0,$$

onde os sinais superiores (resp. inferiores) correspondem à polarização TE (resp. TM) nas amplitudes refletidas.

$$\left| \frac{A_{R2}}{A_{R1}} \right| = \frac{24 A_0}{125} \cdot \frac{5}{A_0} = \frac{24}{25} = 0,96,$$

portanto aproximar $|A_{R2}| \approx |A_{R1}|$ é razoável até uma margem de erro de 4%.

$$\frac{A_{T2}}{A_{T1}} = \frac{24 A_0}{25^2} \cdot \frac{25}{24 A_0} = \frac{1}{25} = 0,04, \text{ razoavelmente}$$

aproximável como nula também com margem de erro de 4%.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad I_T &= |A_T|^2 = |A_{T1} + A_{T2}|^2 \\ &\approx |A_{T1}|^2 = \left| \frac{24}{25} A_0 \right|^2 = \left(\frac{24}{25} \right)^2 I_0 \end{aligned}$$

$$\approx 0,92 I_0.$$

$$I_R = |A_R|^2 = |A_{R1} + A_{R2}|^2$$

$$= |A_{R1}|^2 + |A_{R2}|^2 + 2|A_{R1}||A_{R2}|\cos\Delta \hat{E}_1 \cdot \hat{E}_2,$$

$$\text{onde } \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 r_2 - n_1 r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} (n \cdot 2d - n_0 \cdot 0) + (\varphi_2 - \varphi_1) \text{ para incidência}$$

normal e defasagem dada por

$$e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{A_{R2}}{A_{R1}} = - \left| \frac{A_{R2}}{A_{R1}} \right| \text{ para ambas as}$$

polarizações TE e TM — isto é, as amplitudes refletidas $\frac{A_{R1}}{A_0}$ e $\frac{A_{R2}}{A_0}$ têm sinais opostos para cada uma das polari-

zações, as quais por sua vez não interferem entre si, pelos termos $\hat{E}_1 \cdot \hat{E}_2$ uma vez que são ortogonais.

Agora, com a aproximação do item a,

$$|A_{R1}|^2 \approx |A_{R2}|^2 \approx |A_{R1}||A_{R2}|$$

$$= \left| \frac{1}{5} A_0 \right|^2 = \frac{I_0}{25}, \text{ então, para cada polarização:}$$

$$I_R = \frac{2I_0}{25} (1 + \cos\Delta) = \frac{4I_0}{25} \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right),$$

$$\text{onde } \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2nd + \pi = \pi \left(\frac{4nd}{\lambda_0} + 1 \right),$$

com interferência construtiva ou destrutiva dada por:

CONSTRUTIVA:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 2m : m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{4nd}{\lambda_0} + 1 = 2m : m \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \frac{3d}{\lambda_0} = m - \frac{1}{2} : m \in \mathbb{N}$$

DESTRUTIVA:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot (2m+1) : m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{4nd}{\lambda_0} = 2m : m \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \frac{3d}{\lambda_0} = m : m \in \mathbb{N}$$

com o índice de refração $n = 1,5$ do material em questão.

c) Região do amarelo: $\lambda_0 \approx 580 \text{ nm}$.

Mínima I_R ocorre com interferência destrutiva.

$$\therefore d = m \cdot \frac{\lambda_0}{3} : m \in \mathbb{N}$$

Logo tem-se como possibilidades, a princípio:

$$d_1 = 193 \text{ nm}; d_2 = 387 \text{ nm}; d_3 = 580 \text{ nm};$$

$$d_4 = 773 \text{ nm}; d_5 = 967 \text{ nm}; d_6 = 1,16 \mu\text{m}; \dots$$

Para alguma dessas espessuras apontar máxima reflexão para algum comprimento $\lambda' \in (390, 780) \text{ nm}$,

...1-c)

dever-se ter, com $d = \frac{m\lambda_0}{3}$, também $\frac{3d}{\lambda'} = m' - \frac{1}{2}$

com $m' \in \mathbb{N}$, i.e. interferência construtiva para algum λ' .

Testando individualmente cada espessura:

$$d_1 = 193 \text{ nm} : \begin{cases} \lambda' = 390 \text{ nm} \Rightarrow 3d/\lambda' = 1,487 = 1,987 - 1/2 \\ \lambda' = 780 \text{ nm} \Rightarrow 3d/\lambda' = 0,744 = 1,244 - 1/2, \end{cases}$$

$$d_2 = 387 \text{ nm} : \begin{cases} \lambda' = 390 \text{ nm} \Rightarrow 3d/\lambda' = 2,974 = 3,474 - 1/2 \\ \lambda' = 780 \text{ nm} \Rightarrow 3d/\lambda' = 1,487 = 1,987 - 1/2, \end{cases}$$

$$d_3 = 580 \text{ nm} : \begin{cases} \lambda' = 390 \text{ nm} \Rightarrow 3d/\lambda' = 4,462 = 4,962 - 1/2 \\ \lambda' = 780 \text{ nm} \Rightarrow 3d/\lambda' = 2,231 = 2,731 - 1/2, \end{cases}$$

de onde vemos que há inteiros m' — e portanto comprimentos de onda $\lambda' \in (390, 780) \text{ nm}$ — nos intervalos $(2,73, 4,962)$ e $(1,987, 3,474)$, mas não no intervalo $(1,244, 1,987)$, o que estabelece que para d_1 não há interferência construtiva no espectro visível e sugere que para todos $d_i : i \geq 2$ haverá interferência construtiva no visível.

Isso pode ser confirmado analisando a relação entre os possíveis m e m' inteiros positivos a partir das expressões no topo da página:

$$\text{com } d_m = \frac{m\lambda_0}{3} \text{ e } \frac{3d_m}{\lambda'} = m' - \frac{1}{2},$$

$$\text{tem-se: } \frac{3m\lambda_0}{3\lambda'} = m' - \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \frac{m d_0}{\lambda'} = m' - \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \lambda' = d_0 \left(\frac{m}{m' - 1/2} \right), \quad (*)$$

logo haverá interferência construtiva no espectro visível
se houver $m, m' \in \mathbb{N}$ tais que

$$390 < \frac{580 \text{ nm}}{m' - 1/2} < 780,$$

i.e.

$$0,68 < \frac{m}{m' - 1/2} < 1,34,$$

o que implica

$$\begin{cases} m' - 1/2 < 1,48m \\ m' - 1/2 > 0,74m \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{0,74m + 1/2 < m' < 1,48m + 1/2}, \quad (**)$$

de modo que devemos avaliar m , para cada $m \in \mathbb{N}$,
há $m' \in \mathbb{N}$ que satisfaça (**):

$$m = 1 \text{ (} d_1 = 193 \text{ nm)} : 1,24 < m' < 1,98 ;$$

$$m = 2 \text{ (} d_2 = 387 \text{ nm)} : 1,98 < m' < 3,46 ;$$

$$m = 3 \text{ (} d_3 = 580 \text{ nm)} : 2,72 < m' < 4,94 ,$$

e como o tamanho do intervalo de m' , $(1,48 - 0,74)m$,
cresce com m , concluímos que para todos $m \geq 2$
há soluções $m' \in \mathbb{N}$ para (**).

Logo:

c-i) Para que não haja máxima reflexão no espectro visível deve-se optar pela espessura $d_1 = 193 \text{ nm}$.

c-ii) Para obter máxima reflexão em alguma outra região do espectro, deve-se explorar as soluções $m, m' \in \mathbb{N}$ da eq. (*):

$$\lambda' = \lambda_0 \left(\frac{m}{m' - 1/2} \right) \quad \text{para o comprimento de}$$

onda λ' desejado, com espessuras $d_m = \frac{m \lambda_0}{2} : m \geq 2$.

OBS: Nota-se da expressão (*) que toda espessura de película que dá interferência destrutiva para determinado comprimento de onda λ_0 dará também interferência construtiva para $\lambda' = 2\lambda_0$!

d) Pelo item (c), então, $d = 193 \text{ nm}$. Com absorção, o campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i[(n_{re} + i n_{im}) k_0 z - \omega t]$$

$$= \vec{E}_0 e^{-n_{im} k_0 z} e^{i(n_{re} k_0 z - \omega t)}$$

onde a atenuação da intensidade dada por

$$I_{\text{oss}} = I_T \exp(-2 n_{im} k_0 z),$$

onde no caso $z = d_1$, pois tratamos da incidência normal,

$$c: \quad \frac{I_{0,5}}{I_T} = e^{-2n_m k_0 d_1} = 0,9.$$

$$\Rightarrow 2 \cdot n_m \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot d_1 = -\ln 0,9$$

$$\Rightarrow n_m = \frac{-\ln 0,9}{4\pi d_1} \cdot \lambda_0$$

Assim, se a atenuação de 10% foi observada igualmente para todo um intervalo de comprimentos de onda, tem-se

$$n_m(\lambda_0) = 4,34 \cdot 10^{-5} \lambda_0,$$

com o comprimento de onda no vácuo medido em nm. Para $\lambda_0 \in (390, 780) \text{ nm}$, isso implica $n_m \in (0,017, 0,034)$.

Para atenuação de 10% na região do amarelo ($\lambda_0 = 580 \text{ nm}$), tem-se

$$\underline{n_m(580 \text{ nm}) = 2,5 \cdot 10^{-2}}.$$

$$e) \quad \text{Para } \frac{I_{0,5}}{I_T} = 0,2 = e^{-2n_m k_0 d'},$$

$$\text{tem-se } 2n_m \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot d' = \frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot \left(\frac{-\ln 0,9}{4\pi d_1} \lambda_0 \right) d' = -\ln 0,2,$$

$$\Rightarrow \frac{d'}{d_1} = \frac{\ln 0,2}{\ln 0,9} = 15,3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d' = 2,95 \mu\text{m}}}.$$

... 1)

f) No item (c), com os resultados do item (b), vimos que quanto maior a espessura d mais soluções haverá para interferência construtiva num dado intervalo de comprimentos de onda.

Se analisarmos por exemplo a espessura do item (e), $d = 2953 \text{ nm}$, com as condições do item (b):

$$\frac{3d}{\lambda_0} = \begin{cases} m & : \text{interferência destrutiva } (m \in \mathbb{N}) \\ m - 1/2 & : \text{interferência construtiva } (m \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

para o comprimento de onda usado para o amarelo, $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$, tem-se $\frac{3 \cdot 2953}{580} = 15,3$, ao passo que para $m = 15$

tem-se interferência destrutiva em $\lambda_D = 591 \text{ nm}$ e, para $m = 16$, interferência construtiva em $\lambda_C = 572 \text{ nm}$, ambos na, ou bastante próximo à faixa do amarelo.

Replicando a expressão (*) como

$$\lambda_C = \lambda_D \left(\frac{m_D}{m_C - 1/2} \right),$$

vemos que

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_C} = \frac{m_C - 1/2}{m_D} = \frac{m_C}{m_D} - \frac{1}{2m_D},$$

enquanto grandes espessuras d (em relação à escala de comprimentos de onda em questão) demandam grandes valores de $m \in \mathbb{N}$ para interferência construtiva ou destrutiva. E quanto maiores $m_C \approx m_D$, mais m_C/m_D se aproxima de 1 e mais $1/(2m_D)$ se aproxima de 0, e portanto menor a diferença entre λ_D e λ_C , sendo assim menos perceptíveis os efeitos de interferência!

(2)

Pontos de partida: $\vec{I} = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{k}$,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) : \vec{E}_0 = \vec{E}_0 e^{i\phi_0}$$

$$\vec{B} = \text{Re}(\vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) : \vec{B}_0 = \vec{B}_0 e^{i\phi_0} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_0$$

$$\therefore \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \text{Re}(\vec{E}) \times \text{Re}(\vec{B})$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \frac{(\vec{E} + \vec{E}^*)}{2} \times \frac{(\vec{B} + \vec{B}^*)}{2}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \langle \vec{E} \times \vec{B} + \vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B}^* \rangle$$

$$= \frac{1}{4\mu_0} \left(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 e^{2i\vec{k} \cdot \vec{r}} \langle e^{-2i\omega t} \rangle + \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0 \langle 1 \rangle + \vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* \langle 1 \rangle + \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0^* e^{-2i\vec{k} \cdot \vec{r}} \langle e^{2i\omega t} \rangle \right)$$

onde $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} f(t) dt$ é a média sobre

períodos completos, de modo que

$$\begin{aligned} \langle e^{\pm 2i\omega t} \rangle &= \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} [\cos(2\omega t) \pm i \sin(2\omega t)] dt \\ &= \frac{\omega}{2n\pi} \int_{t_0}^{t_0+2n\pi/\omega} [\cos(2\omega t) \pm i \sin(2\omega t)] dt, \end{aligned}$$

$$\text{e com } \phi = 2\omega t : \begin{cases} d\phi = 2\omega dt \\ t = t_0 : \phi = 2\omega t_0 \\ t = t_0 + 2n\pi/\omega : \phi = 2\omega t_0 + 4n\pi, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle e^{\pm 2i\omega t} \rangle &= \frac{\omega}{2n\pi} \cdot \frac{1}{2\omega} \int_{2\omega t_0}^{2\omega t_0 + 4n\pi} (\cos \phi + i \sin \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{4n\pi} \left(\cos \phi \Big|_{2\omega t_0}^{2\omega t_0 + 4n\pi} + i \sin \phi \Big|_{2\omega t_0}^{2\omega t_0 + 4n\pi} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{4\mu_0} \left(\vec{0} + \vec{E}_0^* \times \vec{B}_0 + \vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* + \vec{0} \right) \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \left[\vec{E}_0^* \times \left(\frac{1}{c} \hat{n} \times \vec{E}_0 \right) + \vec{E}_0 \times \left(\frac{1}{c} \hat{n} \times \vec{E}_0^* \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\mu_0 c} \left[(\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0) \hat{n} + (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) \hat{n} \right], \end{aligned}$$

onde empregamos a identidade

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

e a transversalidade das ondas eletromagnéticas,

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = 0,$$

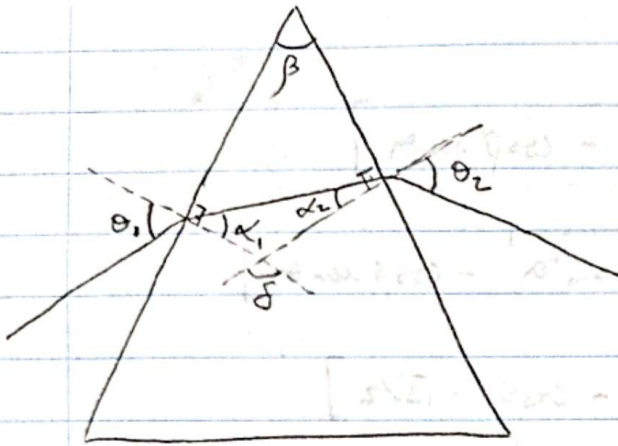
$$\text{low } \frac{1}{4\mu_0 c} = \frac{c}{4\mu_0 c^2} = \frac{c\mu_0 \epsilon_0}{4\mu_0} = \frac{c\epsilon_0}{4},$$

tem-n entao:

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \frac{c\epsilon_0}{2} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) \hat{n} \\ &= \frac{c\epsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2 \hat{n},\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} = \frac{c\epsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2} \quad \square$$

3



Analisando a geometria,

tem-se:

$$\begin{cases} \delta + \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ \\ \delta + \beta + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha_1 + \alpha_2 = \beta} \quad (*)$$

Pela lei de Snell, com $n_{\text{ar}} = n_0 = 1$ e $n_{\text{prisma}} = n$:

$$\begin{cases} n_0 \sin \theta_1 = n \sin \alpha_1 & \Rightarrow \sin \theta_1 = n \cdot \sin \alpha_1 \\ n_0 \sin \theta_2 = n \sin \alpha_2 & \Rightarrow \sin \theta_2 = n \cdot \sin \alpha_2 \end{cases}$$

enquanto $(*) \Rightarrow \sin \alpha_2 = \sin(\beta - \alpha_1)$

$$= \sin \beta \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \beta,$$

 $\therefore$

$$\sin \theta_2 = n \left[\sin \beta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \beta \sin \alpha_1 \right]$$

$$= n \left[\sin \beta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}} - \cos \beta \frac{\sin \theta_1}{n} \right]$$

$$= \sin \beta \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \cos \beta \cdot \sin \theta_1, \quad (**)$$

de onde se nota que $\sin \theta_2$, e portanto θ_2 , é crescente com n , de modo que este ângulo é maior para o azul ($\theta_2 \equiv \theta_a$) do que para o vermelho ($\theta_2 \equiv \theta_v$), de modo que para nosso prisma:

$$\theta_a - \theta_v \approx 2^\circ$$

1, por (**):

$$\theta_a - \theta_v = \arcsin \left[\sin \beta \sqrt{n_a^2 - \sin^2 \theta} - \cos \beta \sin \theta \right]$$

$$- \arcsin \left[\sin \beta \sqrt{n_v^2 - \sin^2 \theta} - \cos \beta \sin \theta \right]$$

$$= \arcsin \left[\sin 50^\circ \sqrt{n_a^2 - 3/4} - \cos 50^\circ \cdot \sqrt{3}/2 \right]$$

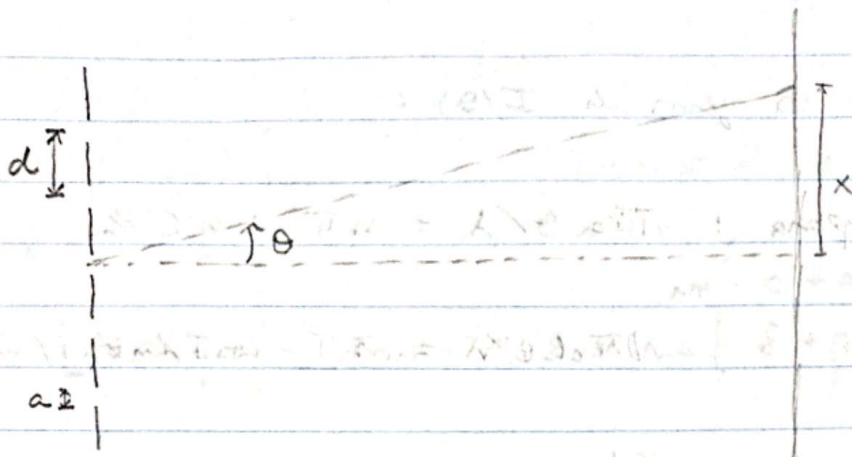
$$- \arcsin \left[\sin 50^\circ \sqrt{n_v^2 - 3/4} - \cos 50^\circ \cdot \sqrt{3}/2 \right].$$

Colocando esta expressão no Wolfram Alpha e inserindo os valores de n_a e n_v para cada material da tabela, obtemos:

$$\theta_a - \theta_v = \begin{cases} 0,699^\circ & \text{para o Zinc Crown} \\ 1,060^\circ & \text{para o Light Flint} \\ 2,169^\circ & \text{para o Heavy Flint} \end{cases},$$

de modo que podemos concluir, com base na medida $\theta_a - \theta_v \approx 2^\circ$, que o prisma é feito pelo tipo de vidro Heavy Flint.

4
a)



$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left(\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}ka\sin\theta\right)}{\frac{1}{2}ka\sin\theta}}_{\text{DIFRAÇÃO}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\theta\right)}{N \cdot \sin\left(\frac{1}{2}kd\sin\theta\right)}}_{\text{INTERFERÊNCIA}} \right)^2$$

Superposição de elementos de frente de onda passando por cada abertura de tamanho a : DIFRAÇÃO.

Superposição de elementos de frentes de onda provenientes de N fendas distantes de d entre si, sem dependência ou referência à largura/abertura das fendas: INTERFERÊNCIA.

Em termos do comprimento de onda, com $k = 2\pi/\lambda$, e empregando a aproximação para pequenos ângulos, $\sin\theta = \theta + O(\theta^3)$:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin(\pi a \theta / \lambda)}{\pi a \theta / \lambda} \cdot \frac{\sin(N \pi d \theta / \lambda)}{N \cdot \sin(\pi d \theta / \lambda)} \right)^2$$

b) Analisando os zeros de $I(\theta)$:

$$I(\theta) = 0 \text{ para : } \pi a \theta / \lambda = n \pi : n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$N \pi d \theta / \lambda = m \pi \text{ e } \pi d \theta / \lambda \neq m' \pi : m, m' \in \mathbb{Z},$$

$$\text{isto é : } \theta_n = \frac{n \lambda}{a} : n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\theta_m = \frac{m \lambda}{N d} : m \in \mathbb{Z} \text{ com } \theta_m \neq \frac{m' \lambda}{d} : m' \in \mathbb{Z},$$

que são respectivamente os zeros de difração e os zeros de interferência, enquanto os máximos de difração e de interferência ocorrem, respectivamente, para:

$$\pi a \alpha / \lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ i.e. } \alpha_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{a} : n \in \mathbb{Z},$$

e

$$N \pi d \alpha / \lambda = m \pi \text{ e } \pi d \theta / \lambda = m' \pi,$$

$$\text{i.e. } \alpha_m = \frac{m \lambda}{N d} = \frac{m' \lambda}{d} : m, m' \in \mathbb{Z}.$$

A curva de interferência é modulada pela curva de difração, de modo que o máximo central ocorre para $\alpha_0 = 0$ e o zero mais próximo e o primeiro zero de interferência, $\theta_1 = \frac{\lambda}{N d}$, de modo que a

semilargura será dada por $\sigma = \frac{\lambda}{N d}$.

... 4-b)

Tomando o zero mais próximo no sentido oposto, tem-se
 $\theta_{-1} = \frac{-\lambda}{Nd}$, de modo que

$$\theta_1 - \theta_{-1} = \frac{2\lambda}{Nd} = 2\sigma \text{ é a largura total}$$

do máximo central (e de todos os máximos centrais de interferência para pequenos ângulos), e por isso a semilargura σ serve de medida de tal largura.

c) Os máximos principais ocorrem para, na interferência,

$$\alpha_m = \frac{m\lambda}{Nd} = \frac{m'\lambda}{d} \text{ com } m, m' \in \mathbb{Z},$$

sendo $\alpha_m = \frac{m'\lambda}{d}$ o que define os máximos $\alpha_m = \frac{m\lambda}{Nd}$

dos zeros $\theta_m = \frac{m\lambda}{Nd}$; os máximos ocorrem para

$m = N \cdot m'$, havendo assim $N-1$ zeros entre dois máximos principais com m múltiplo inteiro de N .

Deste modo, os máximos principais são dados por

$$\alpha_m(\lambda) = \frac{m\lambda}{d}, \text{ e a distância entre máximos}$$

centrais de dois comprimentos de onda é então, em termos do ângulo θ :

$$\Delta\theta_m = \alpha_m(\lambda_1) - \alpha_m(\lambda_2) = \frac{m(\lambda_1 - \lambda_2)}{d},$$

para máximos de mesma ordem m .

Essa distância cresce com m , e a princípio quanto maior m mais se poderia distinguir dois máximos — porém os máximos de mesma ordem. A distância entre máximos pode ser avaliada — e observada! — para máximos de ordens distintas:

$$\Delta\theta = \alpha_{m_1}(\lambda_1) - \alpha_{m_2}(\lambda_2) = \frac{m_1\lambda_1 - m_2\lambda_2}{d},$$

que pode ser menor que $\frac{m_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{d}$.

Por exemplo, para vermelho ($\lambda_1 = 770\text{nm}$) e azul ($\lambda_2 = 490\text{nm}$),

$$\Delta\theta_m = \frac{280\text{m}}{d},$$

$$\text{enquanto } \frac{m\lambda_1 - (2m)\lambda_2}{d} = \frac{-210\text{m}}{d},$$

$$\frac{2m\lambda_1 - 3m\lambda_2}{d} = \frac{70\text{m}}{d},$$

de modo que quanto maiores as ordens m_1 e m_2 , mais combinação há para que máximos principais de diferentes ordens sejam mais próximos que a separação para os primeiros ($m = 1, 2, \text{p.ex.}$).

Nesse sentido, faz diferença a rede ser de difração e não somente de interferência, pois a modulação pela função

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}k a \sin\theta)}{\frac{1}{2}k a \sin\theta} \text{ reduz a intensidade}$$

para maiores valores de m , reduzindo portanto a quase sobreposição de máximos de diferentes ordens, uma vez

que os máximos de maior ordem terão, em geral, menor intensidade (em geral mas não sempre, a depender da razão entre a e d).

d) Para que $\Delta\theta_m > \sigma$, consideremos $\lambda_1 > \lambda_2$:

$$\Delta\theta_m = \frac{m(\lambda_1 - \lambda_2)}{d} > \frac{\lambda_1}{Nd} > \frac{\lambda_2}{Nd}$$

$$\Rightarrow N \cdot m > \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{é a condição para que}$$

a distância entre o máximo de λ_1 e o máximo de λ_2 seja maior que a distância entre o máximo de λ_1 (ou λ_2) e o zero mais próximo (de λ_1 ou λ_2). Assim, o máximo de λ_2 está mais distante do máximo de λ_1 que o zero vizinho, possibilitando um discernimento de que há dois, e não somente um máximo.

e) Para $m = 1$: $N > \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$, i.e. $N > \frac{\lambda_1}{\delta\lambda}$,

com $\lambda_1, \lambda_2 \in (390, 780)\text{nm}$, e $\delta\lambda$ sendo a diferença entre comprimentos de onda que se deseja discernir. Logo, o critério reside no número de fendas:

e-i) $N > \frac{780\text{nm}}{25\text{nm}} > \frac{390\text{nm}}{25\text{nm}} \Rightarrow N \geq 32 \text{ fendas}$,

e-ii) $N > \frac{780\text{nm}}{5\text{nm}} > \frac{390\text{nm}}{5\text{nm}} \Rightarrow N \geq 157 \text{ fendas}$,

e-iii) $N > \frac{780\text{nm}}{2\text{nm}} > \frac{390\text{nm}}{2\text{nm}} \Rightarrow N \geq 391 \text{ fendas}$.