

Fótons , $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ com $m=0$ (Relatividade)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (\text{Planck + Einstein})$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (\text{Einstein})$$

Relação aspecto ondulatório x aspecto corpuscular :

óptica ondulatória x óptica geométrica

ondas eletromagnéticas } ↔ { raios como possíveis trajetórias de fótons

raios $\perp$ frentes de onda

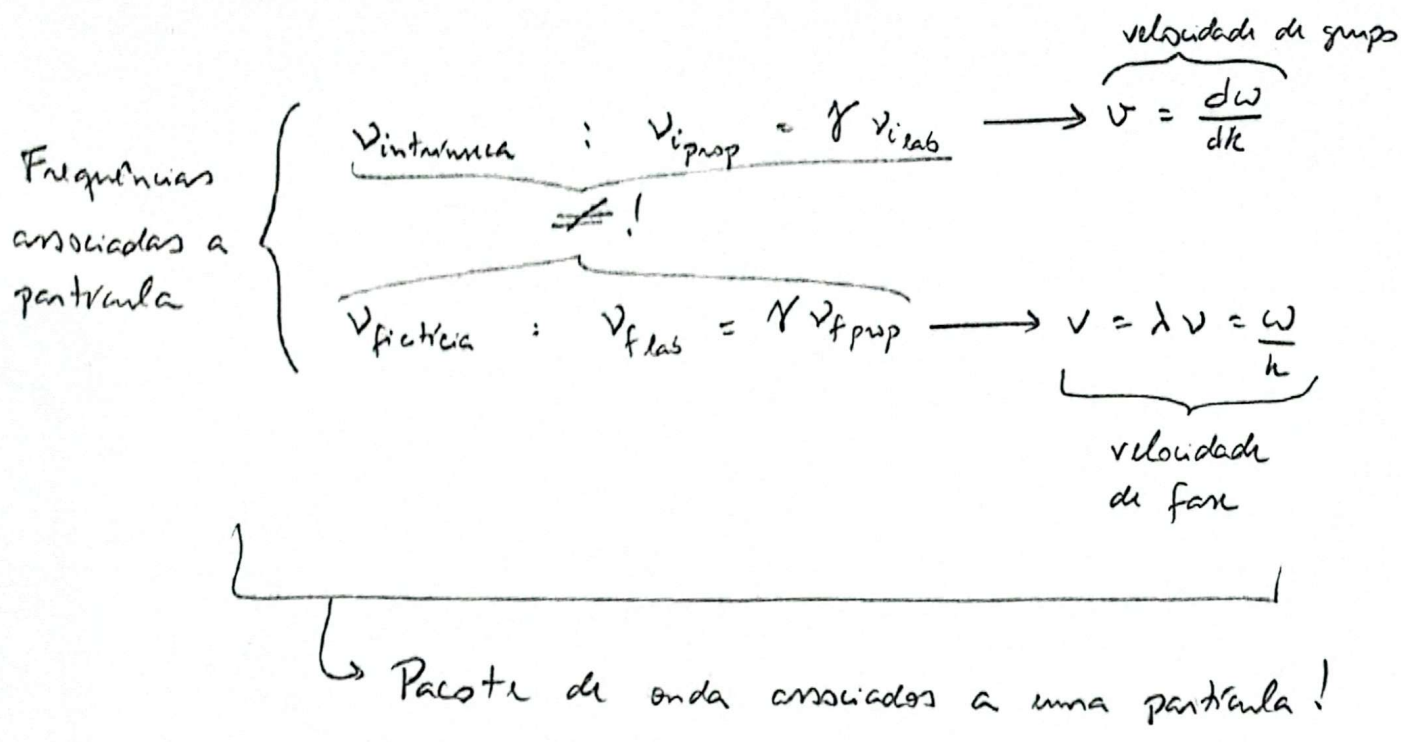
partícula livre : $m, \vec{p}, E :$

$$\vec{v} \parallel \vec{k}$$

$$\gamma mc^2$$

$$\gamma m \vec{v}$$

de Broglie (1923) :



Para que a velocidade de grupo seja a velocidade da partícula,

i.e. $v = \frac{d\omega}{dk}$, com $E = \hbar\omega = \gamma mc^2$, ou seja,

$$v = \frac{d\omega}{dv} \frac{dv}{dk} = \frac{mc^2}{\hbar} \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dk},$$

devemos então ter:

$$\frac{dk}{dv} = \frac{mc^2}{\hbar v} \frac{d\gamma}{dv}$$

$$= \frac{mc^2}{\hbar v} \frac{d}{dv} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{mc^2}{\hbar v} \left(-\frac{1}{2}\right) \gamma^3 \left(-\frac{2v}{c^2}\right)$$

$$= \frac{m}{\hbar} \gamma^3,$$

$$\therefore dk = \frac{m}{\hbar} r^3 dv = \frac{mc}{\hbar} (1-\beta^2)^{-3/2} d\beta,$$

$$\Rightarrow k(v) - k(0) = \frac{mc}{\hbar} \int_0^{v/c} \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{mc}{\hbar} \int_0^{\text{arctan}(v/c)} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos^3 \theta}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \tan \theta \\ d\beta &= \sec^2 \theta d\theta \\ \beta=0 : \theta=0 \end{aligned}$$

$$= \frac{mc}{\hbar} \tan \theta \Big|_0^{\text{arctan}(v/c)}$$

$$= \frac{mc}{\hbar} \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

e com a condição de contorno $k(0) = 0$,

partícula em repouso: número de onda nulo: comprimento de onda ∞ .

$$\Rightarrow k(v) = \frac{mv}{\hbar} = \frac{p}{\hbar},$$

$$\Rightarrow \underline{\hbar k = p}!$$

relação entre
o momento linear
da partícula e o
comprimento da onda
a ela associada!

$$\rightarrow \boxed{p = \frac{h}{\lambda}}!$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k}}!$$

OBS: pode-se obter tanto $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ como $E = \hbar \omega$ impondo-se que a fase $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$ seja invariante por transformações de Lorentz!
(v. Berkeley)

- Experimentos: difração de elétrons: $\lambda_{exp} = 1,65 \text{ \AA}$,
 $\lambda_{teor.} = 1,67 \text{ \AA}$.
 ↘ v. slides.

- Interpretação / significado ??

↘ De volta a fótons e ondas eletromagnéticas:

Intensidade na dupla fenda: $\vec{E}_j = \vec{E}_{0j} e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega t)}$: $j = 1, 2$,

com superposição: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ tem intensidade

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta$$

$$\propto |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$$

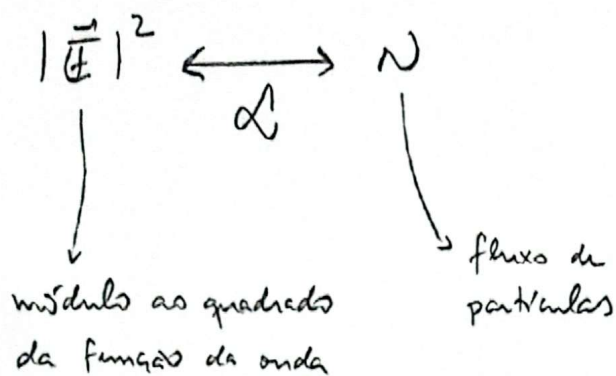
$\updownarrow$
 $N h \nu$
 $\swarrow \quad \searrow$

$\left[\frac{\text{fótons}}{\Delta \cdot m^2} \right]$
 fluxo de fótons

$\left[\frac{J}{\text{fóton}} \right]$
 energia por fóton

$\left. \begin{array}{l} I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \\ \propto |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 \end{array} \right\} [W/m^2]$
 fluxo de energia
 por unidade de
 tempo, por uni-
 dade de área

Sugere-se assim a relação



para baixo fluxo N : padrão
ondulatório obtido em maior
intervalo de tempo, com
a intensidade correspondendo
à frequência relativa de
incidência de fótons.

sugere caráter probabilístico!

$|\vec{E}|^2$ como uma distribuição de probabilidade:

• $|\vec{E}|^2(\vec{r}) dV \equiv$ probabilidade de um fóton estar no elemento
de volume dV na vizinhança do ponto $\vec{r}$,

• $I(x) dx \equiv$ probabilidade de um fóton atingir a região
entre x e $x+dx$ no anteparo.

Anim, denotando por Ψ a função da onda associada a uma partícula, interpretamos:

fluxo de partículas $\propto |\Psi|^2$.

• $|\Psi|^2(\vec{r}) dV$: probabilidade de a partícula estar num elemento de volume dV na vizinhança do ponto $\vec{r}$

$|\Psi|^2$ como uma densidade de probabilidade

(paralelo com f_{stat} e $\bar{E}$)

Ψ : amplitude da probabilidade

(significado na Mecânica Quântica moderna)

Normalização:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi|^2 dV = 1.$$

• $|\Psi(x)|^2 dx$: probabilidade de a partícula estar entre x e $x+dx$

Dupla - função:

$$N(x) = N_0 \frac{|\Psi(x)|^2}{|\Psi_0|^2}$$

↪ incidente

Mas... "quem" ψ ?

(7)

→ ondas-piloto de de Broglie?

→ equações de onda ??

Equações diferencial linear : superposições e Fourier :

$$\psi(x, t) = \int dp A(p) e^{i(kx - \omega t)} \quad , \quad \begin{aligned} k &= p / \hbar \\ \omega &= E / \hbar \end{aligned}$$

sendo que para cada harmônico :

$$\psi = A_0 e^{i(px - Et)/\hbar}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi = -i \frac{E}{\hbar} \psi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = i k \psi = i \frac{p}{\hbar} \psi$$

Como qualquer solução $\psi(x, t)$ da equação de onda será uma superposição (em geral contínua) de tais harmônicos, vamos identificar as derivadas temporal e espacial com a multiplicação por múltiplos da energia e do momento linear, respectivamente :

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i \frac{E}{\hbar} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} \longleftrightarrow i \frac{p}{\hbar}$$

Um, identificando as grandezas físicas com os operadores:

$$E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \mapsto -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

em 3D:

$$\vec{p} \mapsto -i\hbar \vec{\nabla}$$

temos, da relação energia-momento relativística:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow E^2 \psi = (p^2 c^2 + m^2 c^4) \psi$$

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + m^2 c^4 \psi$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}}_{\text{em 3D:}} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$$

EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi$$

Para o caso não-relativístico de uma partícula sujeita a um potencial $V(\vec{r})$:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \Rightarrow E \psi = \frac{p^2}{2m} \psi + V \psi$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \psi + V \psi}_{\text{em 3D:}} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$